1995年京大後期理[2]文[2]共通

(1)

$\angle A_nOB_n=\alpha_n,\ \angle B_nOC_n=\beta_n,\ \angle C_nOA_n=2\pi-a_n-\beta_n$ とする。ただし、$\alpha_n+\beta_n<2\pi$ である。

$$\angle A_{n+1}OB_{n+1}=\alpha_{n+1}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{2} \quad \text{——①}$$

$$\angle B_{n+1}OC_{n+1}=\beta_{n+1}=\frac{\beta_n+(2\pi-\alpha_n-\beta_n)}{2}=\pi-\frac{\alpha_n}{2} \quad \text{——②}$$

②より、$\beta_n=\pi-\frac{\alpha_{n-1}}{2}$ であるから、①に代入すると

$$\alpha_{n+1}=\frac{\alpha_n}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_{n-1}}{4} \qquad \therefore 4\alpha_{n+1}-2\alpha_n+\alpha_{n-1}=2\pi$$ (証明終)

(2)

$$4\alpha_{n+1}-2\alpha_n+\alpha_{n-1}=2\pi \quad \text{——①} \qquad 4\alpha_{n+2}-2\alpha_{n+1}+\alpha_n=2\pi \quad \text{——②}$$

②×2+①より

$$(8\alpha_{n+2}-4\alpha_{n+1}+2\alpha_n)+(4\alpha_{n+1}-2\alpha_n+\alpha_{n-1})=4\pi+2\pi$$

$$8\alpha_{n+2}+\alpha_{n-1}=6\pi \qquad \therefore \alpha_{n+2}=\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{8}\alpha_{n-1}$$ (証明終)

(3)

(2)より $\alpha_{3n}=\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{8}\alpha_{3(n-1)} \quad \alpha_{3n}-\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{8}\left(\alpha_{3(n-1)}-\frac{2}{3}\pi\right) \quad \alpha_{3n}-\frac{2}{3}\pi=\left(-\frac{1}{8}\right)^n\left(\alpha_0-\frac{2}{3}\pi\right)$

したがって $\therefore \alpha_{3n}=\frac{2}{3}\pi+\left(-\frac{1}{8}\right)^n\left(\alpha_0-\frac{2}{3}\pi\right)$ ……(答)