1995 年京大理 $\boxed{3}$

(1)

$y=x^3$ 上の点 $(t,\ t^3)$ における接線は　$y=3t^2(x-t)+t^3=3t^2x-2t^3$

これが $P(p,\ q)$ を通るとき　$q=3t^2p-2t^3$　$2t^3-3pt^2+q=0$ ――①

三次方程式①が、相違なる 3 つの実数解を持つ。

それらの実数解は、いずれも $t^3=at^2+bt+c$ を満たすので、①に代入すると

$2(at^2+bt+c)-3pt^2+q=0$　$(2a-3p)t^2+2bt+2c+q=0$ ――②

②を二次方程式とすると、相違なる実数解が 3 つ存在することになり、不合理である。

$2a-3p=0$ として、②が一次方程式としてもやはり不合理である。

結局、②のすべての係数が 0 であるから　$\therefore a=\dfrac{3}{2}p,\ b=0,\ c=-\dfrac{1}{2}q$　（証明終）

(2)

$t^3=\dfrac{3}{2}pt^2-\dfrac{1}{2}q$ とすると　$\therefore 2t^3-3pt^2+q=0$　①と同じである。

$q=-2t^3+3pt^2$ が、相違なる 3 つの実数解を持つ条件を考える。$f(t)=-2t^3+3pt^2$ とすると

$f'(t)=-6t^2+6pt=-6t(t-p)$

$p=0$ ならば、$f'(t)=-6t^2<0$ となり、$f(t)$ は単調減少。

このとき、$y=q$ と $y=-2t^3+3pt^2$ の交点は 1 つのみである。

$p>0$ のとき、$f(t)$ の増減は右の通り。

$f(0)=0,\ f(p)=p^3$ であるから　$\therefore 0<q<p^3$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘		↗		↘

$p<0$ のとき、$f(t)$ の増減は右の通り。

$\therefore p^3<q<0$

t	$\cdots$	p	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘		↗		↘

以上により　$p<0$ のとき $p^3<q<0$、$p>0$ のとき $0<q<p^3$ ……(答)