1995年京大理$\boxed{4}$

$C_1 = A \quad C_2 = BA \quad C_3 = AABA = {C_1}^2 C_2$

$n=4$のとき、C_1はC_2に、C_2はC_3に置き換わるから　$C_4 = {C_2}^2 C_3$

以下帰納的に、$n \geqq 3$において、$C_n = {C_{n-2}}^2 C_{n-1}$が成立する。

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_3 = C_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$であるから

$$C_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n \geqq 6$のとき、帰納的に　$C_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

以上により、$n \geqq 3$のとき、$C_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$が示された。（証明終）