

(1)

$$\cos 5\theta = \cos(2\theta + 3\theta) = \cos 2\theta \cos 3\theta - \sin 2\theta \sin 3\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1, \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta = 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2\sin^2 \theta \cos \theta \\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta)\cos \theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= \sin \theta \cos 2\theta + \cos \theta \sin 2\theta = \sin \theta(1 - 2\sin^2 \theta) + 2\sin \theta \cos^2 \theta \\ &= \sin \theta - 2\sin^3 \theta + 2\sin \theta(1 - \sin^2 \theta) = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= (2\cos^2 \theta - 1)(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) - 2(3\sin^2 \theta - 4\sin^4 \theta)\cos \theta \\ &= 8\cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta + 3\cos \theta - 2\cos \theta \sin^2 \theta(3 - 4\sin^2 \theta) \\ &= 8\cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta + 3\cos \theta - 2\cos \theta(1 - \cos^2 \theta)(4\cos^2 \theta - 1) \\ &= 8\cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta + 3\cos \theta + 2\cos \theta(4\cos^4 \theta - 5\cos^2 \theta + 1) \\ &= 16\cos^5 \theta - 20\cos^3 \theta + 5\cos \theta \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \dots\dots (\text{答})$$

(2)

$$\cos 5\theta = f(\cos \theta) = 0 \text{ とすると、} k \text{ を整数として } 5\theta = \frac{\pi}{2}(2k+1) \quad \theta = \frac{\pi}{10}(2k+1)$$

このとき、 $x = \cos \theta$ は、 $f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$ の実数解の 1 つである。

$\theta = \frac{\pi}{10}(2k+1)$ のうち、 $\cos \theta$ が相異なるものは $\theta = \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{5\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}$ で十分である。

$$\cos \frac{5\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ で、} 16x^5 - 20x^3 + 5x = x(16x^4 - 20x^2 + 5) = 0 \text{ より、}$$

$\cos \frac{\pi}{10}, \cos \frac{3\pi}{10}, \cos \frac{7\pi}{10}, \cos \frac{9\pi}{10}$ は、 $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ の相異なる 4 実数解である。

$$\text{解と係数の関係により } \therefore \cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{10} \cos \frac{7\pi}{10} \cos \frac{9\pi}{10} = \frac{5}{16} \quad (\text{証明終})$$