

(1)

l を $y=0$ 、 m を $y=\sqrt{3}x$ としても、一般性を失わない。

$A(a, b)$ とすると、 l について A と対称な点は $(a, -b)$ で与えられる。

m について A と対称な点 $C(c, d)$ を考える。 $AC \perp m$ かつ AC の中点は m 上にあるから

$$\frac{d-b}{c-a} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{d+b}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{c+a}{2} \quad \sqrt{3}(d-b) = -c+a, d+b = \sqrt{3}(c+a)$$

$$c + \sqrt{3}d = a + \sqrt{3}b, \sqrt{3}c - d = -\sqrt{3}a + b \quad \therefore c = -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b, d = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b \quad b = \sqrt{3}a \text{ のときも成立。}$$

l に関する対称移動を表す行列は $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 、 m に関する対称移動を表す行列は $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ である。

$P_i(a_i, b_i)$ とすると

$$\begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} = MLMLML \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = (ML)^3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \right\}^3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

したがって、 $P_4 = P_1$ が示された。(証明終)

(2)

行列 L, M による移動は、ある角度の回転移動に等しい。単位円上の点が、角度 α だけ回転移動したとき、

その移動の直線距離は、 $2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|$ で与えられる。

(1) より、 P_{i+1} は P_i に対し 120° 回転移動していることがわかる。 $P_1(\cos \theta, \sin \theta)$ とすると、

$P_1 \rightarrow Q_1 \rightarrow P_2$ と移動したときの偏角の変化は、 $\theta \rightarrow -\theta \rightarrow \theta + 120^\circ$ であるから、そのときの直線移動距離は

$$2 \left| \sin \frac{-2\theta}{2} \right| + 2 \left| \sin \frac{2\theta + 120^\circ}{2} \right| = 2 |\sin \theta| + 2 |\sin(\theta + 60^\circ)| \quad \text{--- ①}$$

$P_2 \rightarrow Q_2 \rightarrow P_3$ と移動したときの直線移動距離は、①の θ を $\theta + 120^\circ$ で置き換えればよいから

$$2 |\sin(\theta + 120^\circ)| + 2 |\sin(\theta + 180^\circ)| = 2 |\sin \theta| + 2 |\sin(\theta + 120^\circ)|$$

$P_3 \rightarrow Q_3 \rightarrow P_1$ と移動したときの直線移動距離は、①の θ を $\theta + 240^\circ$ で置き換えればよいから

$$2 |\sin(\theta + 240^\circ)| + 2 |\sin(\theta + 300^\circ)| = 2 |\sin(\theta + 60^\circ)| + 2 |\sin(\theta + 120^\circ)|$$

以上により、折れ線の長さは $f(\theta) = 4 |\sin \theta| + 4 |\sin(\theta + 60^\circ)| + 4 |\sin(\theta + 120^\circ)|$

$f(\theta + 60^\circ) = 4 |\sin(\theta + 60^\circ)| + 4 |\sin(\theta + 120^\circ)| + 4 |\sin(\theta + 180^\circ)| = f(\theta)$ より、 $0 \leq \theta \leq 60^\circ$ で考えればよい。

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 4 \sin \theta + 4 \sin(\theta + 60^\circ) + 4 \sin(\theta + 120^\circ) = 4 \sin \theta + 2(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) + 2(-\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) \\ &= 4(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) = 8 \sin(\theta + 60^\circ) \end{aligned}$$

したがって、 $\theta = 30^\circ$ のとき、最大値 8 をとる。……(答)

※後期理系 [3] は、 l, m の交点を原点と明記していないだけである。