1996 年京大文 $\boxed{2}$

(1)

すべての n について、 $a_n>0,\ b_n>0$ は明らかである。

$n \geqq 2$ のとき　$b_n-a_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}-\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}=\dfrac{(\sqrt{b_{n-1}}-\sqrt{a_{n-1}})^2}{2}\geqq 0$　$\therefore a_n \leqq b_n$

$0<a\leqq b$ であるから、 $n=1$ でも成立。

$a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_nb_n}-a_n=\sqrt{a_n}(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n})\geqq 0$　$\therefore a_n\leqq a_{n+1}$　$(\because a_n\leqq b_n)$

$b_n-b_{n+1}=b_n-\dfrac{a_n+b_n}{2}=\dfrac{b_n-a_n}{2}\geqq 0$　$\therefore b_{n+1}\leqq b_n$　$(\because a_n\leqq b_n)$

以上により　$\therefore a_n\leqq a_{n+1}\leqq b_{n+1}\leqq b_n$　(証明終)

(2)

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n})^2}{2}=\frac{(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n})^2(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n})^2}{2(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n})^2}=\frac{(b_n-a_n)^2}{2(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n})^2}$$

$a_n\leqq b_n$ であるから　$\therefore b_{n+1}-a_{n+1}\leqq\dfrac{(b_n-a_n)^2}{2(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_n})^2}=\dfrac{1}{8a_n}(b_n-a_n)^2$　(証明終)

(3)

(2) より

$$b_2-a_2\leqq\frac{1}{8a_1}(b_1-a_2)^2=\frac{800^2}{800}=800\quad a_2=\sqrt{100\cdot 900}=300\quad b_2=\frac{100+900}{2}=500$$

$$b_3-a_3\leqq\frac{1}{8a_2}(b_2-a_2)^2=\frac{200^2}{2400}=\frac{50}{3}\quad a_3=\sqrt{300\cdot 500}=100\sqrt{15}\quad b_3=\frac{300+500}{2}=400$$

$$b_4-a_4\leqq\frac{1}{8a_3}(b_3-a_3)^2=\frac{100^2(4-\sqrt{15})^2}{800\sqrt{15}}=\frac{25}{2\sqrt{15}(4+\sqrt{15})^2}<\frac{25}{2\sqrt{15}(2\sqrt{15})^2}=\frac{5}{24\sqrt{15}}<4$$

$b_3-a_3=100(4-\sqrt{15})=\dfrac{100}{4+\sqrt{15}}>\dfrac{100}{8}=\dfrac{25}{2}$ であるから、求める n は　$\therefore n=4$　……(答)