1996 年京大文 $\boxed{4}$

$x \leqq -2$ のとき　$-2 \leqq t \leqq 2$ において $|x-t| = t-x$

$$g(x) = \int_{-2}^{2}(t-x)(t^2-a^2)dt = \int_{-2}^{2}(t^3-a^2t)dt - x\int_{-2}^{2}(t^2-a^2)dt = -2x\int_{0}^{2}(t^2-a^2)dt$$

$$= -2x\left[\frac{t^3}{3} - a^2t\right]_0^2 = -4x\left(\frac{4}{3} - a^2\right)$$

$2 \leqq x$ のとき　$-2 \leqq t \leqq 2$ において $|x-t| = x-t$

$$g(x) = \int_{-2}^{2}(x-t)(t^2-a^2)dt = x\int_{-2}^{2}(t^2-a^2)dt - \int_{-2}^{2}(t^3-a^2t)dt = 2x\int_{0}^{2}(t^2-a^2)dt$$

$$= 2x\left[\frac{t^3}{3} - a^2t\right]_0^2 = 4x\left(\frac{4}{3} - a^2\right)$$

$-2 < x < 2$ のとき　$-2 \leqq t \leqq x$ において $|x-t| = x-t$　　$x \leqq t \leqq 2$ において $|x-t| = t-x$

$$g(x) = \int_{-2}^{x}(x-t)(t^2-a^2)dt + \int_{x}^{2}(t-x)(t^2-a^2)dt$$

$$= x\int_{-2}^{x}(t^2-a^2)dt - \int_{-2}^{x}(t^3-a^2t)dt + \int_{x}^{2}(t^3-a^2t)dt - x\int_{x}^{2}(t^2-a^2)dt$$

$$= x\left(\left[\frac{t^3}{3} - a^2t\right]_{-2}^{x} + \left[\frac{t^3}{3} - a^2t\right]_{2}^{x}\right) + \left(\left[\frac{t^4}{4} - a^2\frac{t^2}{2}\right]_{x}^{-2} + \left[\frac{t^4}{4} - a^2\frac{t^2}{2}\right]_{x}^{2}\right)$$

$$= x\left(\frac{2}{3}x^3 - 2a^2x + \frac{8}{3} - 2a^2 - \frac{8}{3} + 2a^2\right) + \left(8 - 4a^2 - \frac{x^4}{2} + a^2x^2\right)$$

$$= \frac{2}{3}x^4 - 2a^2x^2 + 8 - 4a^2 - \frac{x^4}{2} + a^2x^2 = \frac{1}{6}x^4 - a^2x^2 - 4a^2 + 8 = \frac{1}{6}(x^2-3a^2)^2 - \frac{3}{2}a^4 - 4a^2 + 8$$

$g(x)$ は $x = \pm 2$ で連続である。

$0 < a < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき　$g(x)$ は $x \leqq -2$ で単調減少、$2 \leqq x$ で単調増加。

$-2 \leqq x \leqq 2$、すなわち $0 \leqq x^2 \leqq 4$ のとき

$0 < 3a^2 < 4$ であるから、$g(x)$ は $x^2 = 3a^2$ のとき、最小値 $-\dfrac{3}{2}a^4 - 4a^2 + 8$ をとる。

$a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき　$x \leqq -2,\ 2 \leqq x$ において $g(x) = 0$ 。

$0 \leqq x^2 \leqq 4$ のとき　$3a^2 = 4$ であるから、$g(x)$ は $x^2 = 4$ のとき、最小値 $-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{16}{9} - 4\cdot\dfrac{4}{3} + 8 = 0$ をとる。

$\dfrac{2}{\sqrt{3}} < a$ のとき　$g(x)$ は $x \leqq -2$ で単調増加、$2 \leqq x$ で単調減少。

すなわち、$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$ であるから、$g(x)$ は最小値を持たない。

以上により　$g(x)$ が最小値を持つ範囲は $0 < a \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$、最小値は $-\dfrac{3}{2}a^4 - 4a^2 + 8$ ……(答)