1996 年京大後期理 $\boxed{1}$

(1)

数学的帰納法で示す。

$n=1$ のとき　$f_1(x)=x,\ g_1(x)=1$ とすれば題意を満たす。最上位の係数はいずれも正。

$n=k$ のとき

係数がすべて整数であり、最上位の係数は正である、k 次式 $f_k(x)$ と、$k-1$ 次式 $g_k(x)$ が存在して、

$\cos k\theta = f_k(\cos\theta),\ \sin k\theta = g_k(\cos\theta)\sin\theta$ と書けると仮定すると

$$\cos(k+1)\theta = \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta = \cos\theta f_k(\cos\theta) - \sin^2\theta g_k(\cos\theta)$$
$$= \cos\theta f_k(\cos\theta) - (1-\cos^2\theta)g_k(\cos\theta)$$
$$\sin(k+1)\theta = \sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta = g_k(\cos\theta)\sin\theta\cos\theta + f_k(\cos\theta)\sin\theta$$
$$= \left\{ f_k(\cos\theta) + \cos\theta g_k(\cos\theta)\right\}\sin\theta$$

$f_{k+1}(x) = x f_k(x) + (x^2-1)g_k(x),\ g_{k+1}(x) = f_k(x) + x g_k(x)$ とする。

$f_k(x),\ g_k(x)$ の最上位の係数を $a_k,\ b_{k-1}$ とすると、$a_k>0,\ b_{k-1}>0$ であるから、

$f_{k+1}(x),\ g_{k+1}(x)$ の最上位の係数は、いずれも a_k+b_{k-1} であり、正である。

$f_{k+1}(x)$ は $k+1$ 次式、$g_{k+1}(x)$ は k 次式であり、係数も整数であるから、$n=k+1$ でも成立。

以上により示された。(証明終)

(2)

$\cos n\theta = f_n(\cos\theta)$ の両辺を θ で微分すると

$$-n\sin n\theta = f_n'(\cos\theta)\cdot(-\sin\theta) \qquad f_n'(\cos\theta)\sin\theta = n\sin n\theta = n g_n(\cos\theta)\sin\theta$$

すべての実数 θ について成立するには

$$f_n'(\cos\theta) = n g_n(\cos\theta) \qquad \therefore f_n'(x) = n g_n(x)$$ (証明終)

(3)

$f_p(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ g_p(x) = b_{p-1}x^{p-1} + b_{p-2}x^{p-2} + \cdots + b_1 x + b_0$ とする。

(2) より

$$f_p'(x) = pa_p x^{p-1} + (p-1)a_{p-1}x^{p-2} + \cdots + 2a_2 x + 2a_1 = pg_p(x)$$
$$= pb_{p-1}x^{p-1} + pb_{p-2}x^{p-2} + \cdots + pb_1 x + pb_0$$

$p-1$ 次以下の係数を比較すると　$ka_k = pb_{k-1}\ (1 \leqq k \leqq p-1)$

$f_p(x),\ g_p(x)$ の係数はすべて整数であり、p は 3 以上の素数であるので、

$2 \leqq k \leqq p-1$ のとき、k は p の約数ではないから、a_k は p で割り切れなければならない。

$k=1$ のとき、結局 a_1 は p で割り切れなければならない。

また、$\cos p\theta = f_p(\cos\theta)$ はすべての実数 θ について成立するので、$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ とすると、p は奇数であるから、

$0 = f_p(0)$ より $a_0 = 0$ がわかる。したがって、a_0 も p で割り切れる。

以上により、示された。(証明終)