1996 年京大後期理 $\boxed{3}$

(1)

l を $y=0$、m を $y=\sqrt{3}x$ としても、一般性を失わない。

$A(a,\ b)$ とすると、l について A と対称な点は $(a,\ -b)$ で与えられる。

m について A と対称な点 $C(c,\ d)$ を考える。$AC\perp m$ かつ AC の中点は m 上にあるから

$$\frac{d-b}{c-a}=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{d+b}{2}=\sqrt{3}\cdot\frac{c+a}{2} \qquad \sqrt{3}(d-b)=-c+a,\ d+b=\sqrt{3}(c+a)$$

$$c+\sqrt{3}d=a+\sqrt{3}b,\ \sqrt{3}c-d=-\sqrt{3}a+b \qquad \therefore c=-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b,\ d=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b \qquad b=\sqrt{3}a \text{ のときも成立。}$$

l に関する対称移動を表す行列は $L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$、$m$ に関する対称移動を表す行列は $M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ である。

$P_i(a_i,\ b_i)$ とすると

$$\begin{pmatrix}a_4\\ b_4\end{pmatrix}=MLMLML\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=(ML)^3\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\right\}^3\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 120^\circ & -\sin 120^\circ\\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}$$

したがって、$P_4=P_1$ が示された。(証明終)

(2)

行列 $L,\ M$ による移動は、ある角度の回転移動に等しい。単位円上の点が、角度 α だけ回転移動したとき、

その移動の直線距離は、$2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$ で与えられる。

(1) より、P_{i+1} は P_i に対し 120° 回転移動していることがわかる。$P_1(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすると、

$P_1\to Q_1\to P_2$ と移動したときの偏角の変化は、$\theta\to-\theta\to\theta+120^\circ$ であるから、そのときの直線移動距離は

$$2\left|\sin\frac{-2\theta}{2}\right|+2\left|\sin\frac{2\theta+120^\circ}{2}\right|=2|\sin\theta|+2|\sin(\theta+60^\circ)| \quad \text{——①}$$

$P_2\to Q_2\to P_3$ と移動したときの直線移動距離は、①の θ を $\theta+120^\circ$ で置き換えればよいから

$$2|\sin(\theta+120^\circ)|+2|\sin(\theta+180^\circ)|=2|\sin\theta|+2|\sin(\theta+120^\circ)|$$

$P_3\to Q_3\to P_1$ と移動したときの直線移動距離は、①の θ を $\theta+240^\circ$ で置き換えればよいから

$$2|\sin(\theta+240^\circ)|+2|\sin(\theta+300^\circ)|=2|\sin(\theta+60^\circ)|+2|\sin(\theta+120^\circ)|$$

以上により、折れ線の長さは $f(\theta)=4|\sin\theta|+4|\sin(\theta+60^\circ)|+4|\sin(\theta+120^\circ)|$

$f(\theta+60^\circ)=4|\sin(\theta+60^\circ)|+4|\sin(\theta+120^\circ)|+4|\sin(\theta+180^\circ)|=f(\theta)$ より、$0\leqq\theta\leqq 60^\circ$ で考えればよい。

$$f(\theta)=4\sin\theta+4\sin(\theta+60^\circ)+4\sin(\theta+120^\circ)=4\sin\theta+2(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)+2(-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)$$
$$=4(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)=8\sin(\theta+60^\circ)$$

したがって、$\theta=30^\circ$ のとき、最大値 8 をとる。……(答)