1996年京大後期理 $\boxed{6}$

(1)

進む方向を時計回りとし、出発点から順に、各点に1からnまで番号をつける。

最初の1周において、番号1の点から出発し、番号$m\,(3 \leqq m \leqq n)$の点に止まる確率をa_mとすると

$$a_m = \frac{1}{2}a_{m-1} + \frac{1}{2}a_{m-2} \qquad a_m + \frac{1}{2}a_{m-1} = a_{m-1} + \frac{1}{2}a_{m-2}$$

$a_m + \frac{1}{2}a_{m-1}$は一定であり、$a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$であるから

$$a_m + \frac{1}{2}a_{m-1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1 \qquad a_m - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_{m-1} - \frac{2}{3}\right)$$

$$a_m - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-3}\left(a_3 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-3} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \qquad \therefore a_m = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \qquad m=2\text{でも成立。}$$

最初の1周において出発点を跳び越すには、番号nの点に止まって裏が出ればよいから、

求める確率は　$\therefore p_n = \frac{1}{2}a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$　……(答)

(2)

$k-1$周目までは出発点を跳び越し、k周目に初めて出発点を踏むとき

1周目は、出発点を跳び越して番号2の点に止まる。この確率は　$p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

2周目から$k-1$周目は、番号2の点を出発して番号nの点に止まり、出発点を跳び越して番号2の点に戻る。

この確率は　$\frac{1}{2}a_{n-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

k周目は、番号2の点を出発して番号1の点に止まる。この確率は　$a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore q_{n,\,k} = \left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\cdot\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^{k-2}\cdot\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} q_{n,\,k} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\cdot\frac{2}{3} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^k \quad \text{……(答)}$$