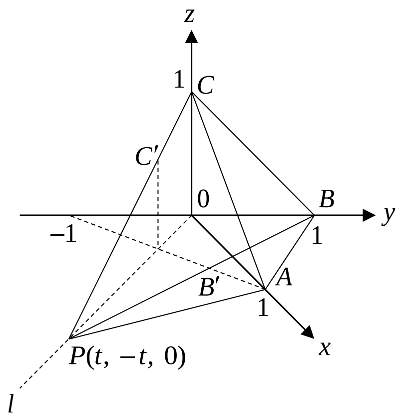
1996 年京大理 $\boxed{2}$



直線lの方向ベクトルは$(1,\ -1,\ 0)$であり、点$A(1,\ 0,\ 0)$を通り

lに垂直な平面αの方程式は　$(x-1)-y=0$　$\therefore y=x-1$

αと辺$PB,\ PC$との交点を、$B',\ C'$とし、これらの座標を求める。

$\overrightarrow{BP}=\begin{pmatrix} t \\ -t-1 \\ 0 \end{pmatrix}$より、$PB$上の点は$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} t \\ -t-1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kt \\ 1-k(t+1) \\ 0 \end{pmatrix}$と表せる。

これがα上にあるとき　$1-k(t+1)=kt-1$　$k(2t+1)=2$　$k=\dfrac{2}{2t+1}$

これより、B'の座標は　$\left(\dfrac{2t}{2t+1},\ -\dfrac{1}{2t+1},\ 0\right)=\left(1-\dfrac{1}{2t+1},\ -\dfrac{1}{2t+1},\ 0\right)$

$\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix} t \\ -t \\ -1 \end{pmatrix}$より、$CP$上の点は$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} t \\ -t \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kt \\ -kt \\ 1-k \end{pmatrix}$と表せる。

これがα上にあるとき　$-kt=kt-1$　$2kt=1$　$k=\dfrac{1}{2t}$　これより、C'の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1-\dfrac{1}{2t}\right)$

四面体$ABCP$とαが交わってできる図形は、$\triangle AB'C'$である。

辺AB'はxy平面上にあり、$\overrightarrow{AB'}=\left(-\dfrac{1}{2t+1},\ -\dfrac{1}{2t+1},\ 0\right)$であるから　$AB'=\dfrac{\sqrt{2}}{2t+1}$

AB'を底辺にとれば、高さはC'のz座標に等しいから　$S(t)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2t+1}\cdot\left(1-\dfrac{1}{2t}\right)=\dfrac{\sqrt{2}(2t-1)}{4t(2t+1)}$

$$S'(t)=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2(2t^2+t)-(2t-1)(4t+1)}{t^2(2t+1)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{4t^2+2t-(8t^2-2t-1)}{t^2(2t+1)^2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{4t^2-4t-1}{t^2(2t+1)^2}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{t^2(2t+1)^2}\left(t-\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\left(t-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$

$t>\dfrac{1}{2}$における、$S(t)$の増減は右の通り。

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗		↘

$S(t)$は$t=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$において最大であるから、求める最大値は

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{2}(-1+\sqrt{2})^2}{2}=\frac{\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}-2 \quad \cdots\cdots(答)$$