1996 年京大理 $\boxed{3}$

$\vec{v}=\vec{0}$ のとき、$f(\vec{v})=\vec{0}$ となり、$f(\vec{v})\neq\vec{v}$ に反するから、以下 $\vec{v}\neq\vec{0}$ とする。

1 次変換 f を表す行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、$p=a+d,\ q=ad-bc$ とおく。

E を単位行列とすると、ケーリー・ハミルトンの定理より、$A^2=pA-qE$ であるから

$A^3=pA^2-qA=p(pA-qE)-qA=(p^2-q)A-pqE$

f^3 を表す行列は、A^3 であるから

$f^3(\vec{v})=(p^2-q)A\vec{v}-pq\vec{v}=(p^2-q)f(\vec{v})-pq\vec{v}=\vec{v}\qquad (p^2-q)f(\vec{v})=(1+pq)\vec{v}$

$p^2-q\neq 0$ のとき、$f(\vec{v})=\dfrac{1+pq}{p^2-q}\vec{v}$ となり、$f(\vec{v})$ は $\vec{v}$ の定数倍になるから、$f(\vec{v})=k\vec{v}$ とおく。

すると、$f^2(\vec{v})=kf(\vec{v})=k^2\vec{v}$、$f^3(\vec{v})=k^2f(\vec{v})=k^3\vec{v}=\vec{v}$ であるから　$k^3=1\quad \therefore k=1$

このとき、$f(\vec{v})=\vec{v}$ となるから、不適。

したがって、$p^2-q=0$ であり、$q=p^2$。$(1+pq)\vec{v}=\vec{0}$ であるから、$1+pq=0$。

$pq=p^3=-1$ より　$\therefore p=-1,\ q=1$

以上により、$A^3=E$ であるから、f^3 は恒等変換である。（証明終）

※2007 年理系乙 $\boxed{5}$ に、類題あり。