1996年京大理 $\boxed{5}$

(1)

$$E_1=\frac{1}{3}\left|\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP_0}}{2}\right|^2+\frac{1}{3}\left|\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP_0}}{2}\right|^2+\frac{1}{3}\left|\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP_0}}{2}\right|^2$$

$$=\frac{1}{12}\left(\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+3\left|\overrightarrow{OP_0}\right|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_0}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP_0}+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP_0}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\left\{3+3\left|\overrightarrow{OP_0}\right|^2+2\overrightarrow{OP_0}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\right\}$$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ であるから

$$\therefore E_1=\frac{1}{4}\left(1+\left|\overrightarrow{OP_0}\right|^2\right)$$ ……(答)

(2)

$$\overrightarrow{OP_1}=\frac{\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{OX_1}}{2}\qquad \overrightarrow{OP_2}=\frac{\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OX_2}}{2}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OP_0}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OX_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OX_2}$$

$$\overrightarrow{OP_3}=\frac{\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OX_3}}{2}=\frac{1}{8}\overrightarrow{OP_0}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OX_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OX_2}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OX_3}$$

$\overrightarrow{OP_n}=\frac{1}{2^n}\overrightarrow{OP_0}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{n+1-i}}\overrightarrow{OX_i}$ と予想できるので、数学的帰納法で示す。

$n=1,\ 2,\ 3$ のとき成立。

$n=k$ のとき　$\overrightarrow{OP_k}=\frac{1}{2^k}\overrightarrow{OP_0}+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^{k+1-i}}\overrightarrow{OX_i}$ と仮定すると

$$\overrightarrow{OP_{k+1}}=\frac{\overrightarrow{OP_k}+\overrightarrow{OX_{k+1}}}{2}=\frac{1}{2^{k+1}}\overrightarrow{OP_0}+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^{k+2-i}}\overrightarrow{OX_i}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OX_{k+1}}=\frac{1}{2^{k+1}}\overrightarrow{OP_0}+\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{2^{k+2-i}}\overrightarrow{OX_i}$$

したがって、$n=k+1$ でも成立。

$$\therefore \overrightarrow{OP_n}=\frac{1}{2^n}\overrightarrow{OP_0}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{n+1-i}}\overrightarrow{OX_i}$$ ……(答)

(3)

$\overrightarrow{OP_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{n+1-i}}\overrightarrow{OX_i}$ である。

$\overrightarrow{OX_i}$ は $\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}$ のうちいずれかであるから、$\overrightarrow{OP_n}$ としてとり得るベクトルは、3^n 通り。

とり得るすべての $\overrightarrow{OP_n}$ についての $\left|\overrightarrow{OP_n}\right|^2$ の和を、$\sum_{1}^{3^n}\left|\overrightarrow{OP_n}\right|^2$ と書くと

$$\therefore E_n=\frac{1}{3^n}\sum_{1}^{3^n}\left|\overrightarrow{OP_n}\right|^2$$

これより

$$E_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}}\sum_{1}^{3^{n+1}}\left|\overrightarrow{OP_{n+1}}\right|^2=\frac{1}{3^{n+1}}\sum_{1}^{3^{n+1}}\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_n}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OX_{n+1}}\right|^2=\frac{1}{4\cdot 3^{n+1}}\sum_{1}^{3^n}\left(\left|\overrightarrow{OP_n}+\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OP_n}+\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OP_n}+\overrightarrow{OC}\right|^2\right)$$

$$=\frac{1}{4\cdot 3^{n+1}}\sum_{1}^{3^n}\left\{3\left|\overrightarrow{OP_n}\right|^2+3+2\overrightarrow{OP_0}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\right\}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^n}\sum_{1}^{3^n}\left|\overrightarrow{OP_n}\right|^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}E_n+\frac{1}{4}$$

$$E_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(E_n-\frac{1}{3}\right)\qquad E_n-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(E_1-\frac{1}{3}\right)$$

$E_1=\dfrac{1}{4}$ より　$E_n-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$　$\therefore E_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}$ ……(答)