1996年京大理 $\boxed{6}$

最初に積むガソリンの量を x_0 (kg)、走行速度を v (km/h) とする。

100km 離れた地点まで要する時間は、$\dfrac{100}{v}$ (h) である。

走り初めて t (h) 後のガソリンの量を x (kg) とすると、t (h) 後までのガソリンの消費量は $x_0 - x$ (kg) である。

$a = e^{kv}$ とおくと

$$\frac{d}{dt}(x_0 - x) = -\frac{dx}{dt} = \frac{100+x}{100}a \qquad \frac{1}{100+x}dx = -\frac{1}{100}adt \qquad \log(100+x) = -\frac{1}{100}at + C$$

$$100 + x = e^{-\frac{1}{100}at+C} \qquad e^C \text{ を } C \text{ で置き換えると} \qquad x = Ce^{-\frac{1}{100}at} - 100$$

$t=0$ のとき $x = x_0$ より　$\therefore C = 100 + x_0$　$\therefore x = (100 + x_0)e^{-\frac{1}{100}at} - 100$

ここで、$t = \dfrac{100}{v}$ において、$x \geqq 0$ でなければならないから

$$(100 + x_0)e^{-\frac{a}{v}} - 100 \geqq 0 \qquad 100 + x_0 \geqq 100e^{\frac{a}{v}} \qquad \therefore x_0 \geqq 100(e^{\frac{a}{v}} - 1) \text{ ——①}$$

①の条件下で、$\dfrac{100}{v}$ (h) 後のガソリンの消費量は　$(100 + x_0)(1 - e^{-\frac{a}{v}})$

v は一定であり、x_0 が最小のとき、すなわち $x_0 = 100(e^{\frac{a}{v}} - 1)$ のとき、ガソリンの消費量は最小である。

このとき、ちょうど 100km 走行してガソリンを使い切るから、ガソリンの消費量は x_0 に等しい。

x_0 は、$e^{\frac{a}{v}}$ が最小のとき、すなわち $\dfrac{a}{v} = \dfrac{e^{kv}}{v}$ が最小のとき、最小となる。$f(v) = \dfrac{e^{kv}}{v}$ とすると

$$f'(v) = \frac{ke^{kv} \cdot v - e^{kv} \cdot 1}{v^2} = \frac{(kv-1)e^{kv}}{v^2}$$

v	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{k}$	$\cdots$
$f'(v)$		$-$	0	$+$
$f(v)$		↘		↗

増減は右の通りで、$f(v)$ は $v = \dfrac{1}{k}$ のとき最小である。

以上により、$x_0 = 100(e^{ke} - 1),\ v = \dfrac{1}{k}$ とすればよい。……(答)