1997 年京大後期文 $\boxed{4}$

（イ）が成り立つとき

$A+B+C=180°$ であるから、 $A=180°-(B+C)$ である。

$\alpha=\sin 2A=\sin\{360°-2(B+C)\}=-\sin 2(B+C)$

$\alpha^2=\sin^2 2(B+C)=(\sin 2B\cos 2C+\cos 2B\sin 2C)^2$

$=\sin^2 2B\cos^2 2C+\cos^2 2B\sin^2 2C+2\sin 2B\cos 2BA\sin 2C\cos 2C$

$=\beta^2+\gamma^2=\sin^2 2B+\sin^2 2C$

$2\sin 2B\cos 2B\sin 2C\cos 2C-\sin^2 2B(1-\cos^2 2C)-\sin^2 2C(1-\cos^2 2B)=0$

$2\sin 2B\cos 2B\sin 2C\cos 2C-2\sin^2 2B\sin^2 2C=0$ 　 $\sin 2B\sin 2C(\cos 2B\cos 2C-\sin 2B\sin 2C)=0$

$\therefore \sin 2B\sin 2C\cos 2(B+C)=0$

$\sin 2B=0$ 、または $\sin 2C=0$ 、または $\cos 2(B+C)=0$ であるから

$2B=180°$ 、または $2C=180°$ 、または $2(B+C)=90°$ 、または $2(B+C)=270°$

$B=90°$ 、または $C=90°$ 、または $B+C=45°$ 、または $B+C=135°$

$A=45°$ 、または $A=135°$ 、または $B=90°$ 、または $C=90°$

したがって、（ロ）が成り立つ。

（ロ）が成り立つとき

$A=45°$ のとき 　 $B+C=135°$ より、 $B=135°-C$

$\alpha^2=\sin^2 90°=1$ 　 $\beta^2=\sin^2(270°-2C)=\cos^2 2C$ 　 $\beta^2+\gamma^2=\cos^2 2C+\sin^2 2C=1$

$A=135°$ のとき 　 $B+C=45°$ より、 $B=45°-C$

$\alpha^2=\sin^2 270°=1$ 　 $\beta^2=\sin^2(90°-2C)=\cos^2 2C$ 　 $\beta^2+\gamma^2=\cos^2 2C+\sin^2 2C=1$

$B=90°$ のとき 　 $A+C=90°$ より、 $A=90°-C$

$\beta^2=\sin^2 180°=0$ 　 $\alpha^2=\sin^2(180°-2C)=\sin^2 2C=\gamma^2$

$C=90°$ のとき 　 $A+B=90°$ より、 $A=90°-B$

$\gamma^2=\sin^2 180°=0$ 　 $\alpha^2=\sin^2(180°-2B)=\sin^2 2B=\beta^2$

したがって、いずれにしても $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ であり、（イ）が成り立つ。

以上により、条件（イ）と（ロ）は互いに同値であることが示された。（証明終）