1997年京大文 $\boxed{2}$

(イ)が成り立つとき

$n=60m$ とする。m は自然数である。

$60=2^2\cdot3\cdot5$ であるから、m がいかなる値であっても、$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=4,\ a_5=5,\ a_6=6$ である。

したがって、6個以上の約数を持ち、$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$ であるから $\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_6}=\dfrac{1}{a_2}$ も成立。

$\therefore$(イ)$\Rightarrow$(ロ)

(ロ)が成り立つとき

$n=1$ は明らかに不適。$n\geqq2$ のとき、p を素数として $a_2=p$ とおける。

$\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_6}=\dfrac{1}{p}$ が成立するとき　$a_3a_6=pa_3+pa_6$　$(a_3-p)(a_6-p)=p^2$

$a_3>p,\ a_6>p,\ a_3<a_6$ より、$a_3-p=1,\ a_6-p=p^2$ しかあり得ないので　$\therefore a_3=p+1,\ a_6=p^2+p$

$a_2=p,\ a_3=p+1$ より、p が奇数ならば a_3 は偶数になり、$a_2=p\geqq3$ と矛盾する。

したがって、$p=2$ しかあり得ない。

$a_2=2,\ a_3=3,\ a_6=6$ であり、結局 $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=4,\ a_5=5,\ a_6=6$ でなければならない。

n は、少なくとも素因数2を2個以上、素因数3, 5を1個以上含む。

したがって、n は $2^2\cdot3\cdot5=60$ の倍数である。

$\therefore$(ロ)$\Rightarrow$(イ)

以上により、(イ)$\Leftrightarrow$(ロ)が示された。(証明終)