1997年京大文 $\boxed{4}$

$y=(ax+b)^2$ は2次関数であるから、$a\neq 0$。

$y=(ax+b)^2=a^2\left(x+\dfrac{b}{a}\right)^2$ は下に凸であるから、$0\leqq x\leqq 1$ において最大となるのは、$x=0$ か $x=1$ のとき。

$M(a,\,b)$ は、$(a+b)^2$ と b^2 のうち、大きい方である。

$(a+b)^2-b^2=a^2+2ab=a^2\left(1+2\dfrac{b}{a}\right)\geqq 0$ のとき　$1+2\dfrac{b}{a}\geqq 0$　$\therefore \dfrac{b}{a}\geqq -\dfrac{1}{2}$

したがって　$\dfrac{b}{a}\geqq -\dfrac{1}{2}$ のとき $M(a,\,b)=(a+b)^2$　$\dfrac{b}{a}<-\dfrac{1}{2}$ のとき $M(a,\,b)=b^2$

$$\int_0^1 (ax+b)^2\,dx=a^2\int_0^1\left(x+\frac{b}{a}\right)^2dx=\frac{a^2}{3}\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^3\right]_0^1=\frac{(a+b)^3-b^3}{3a}=\frac{a^3+3a^2b+3ab^2}{3a}=\frac{a^2+3ab+3b^2}{3}$$

不等式（∗）が成り立つとき、$m\geqq \dfrac{3M(a,\,b)}{a^2+3ab+3b^2}$ であり、m が右辺の最大値以上であればよい。

$\dfrac{b}{a}\geqq -\dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{3M(a,\,b)}{a^2+3ab+3b^2}=\dfrac{3(a^2+2ab+b^2)}{a^2+3ab+3b^2}=1+\dfrac{2a^2+3ab}{a^2+3ab+3b^2}=1+\dfrac{2+3\dfrac{b}{a}}{1+3\dfrac{b}{a}+3\dfrac{b^2}{a^2}}$

$k\geqq -\dfrac{1}{2}$ において、$f(k)=1+\dfrac{2+3k}{1+3k+3k^2}$ の増減を考える。$1+3k+3k^2=3\left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}>0$ であるから

$$f'(k)=\frac{3(1+3k+3k^2)-(2+3k)(3+6k)}{(1+3k+3k^2)^2}=3\cdot\frac{1+3k+3k^2-(2+7k+6k^2)}{(1+3k+3k^2)^2}$$

$$=-3\cdot\frac{1+4k+3k^2}{(1+3k+3k^2)^2}=-3\cdot\frac{(1+k)(1+3k)}{(1+3k+3k^2)^2}$$

k	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(k)$		＋	0	－
$f(k)$		↗		↘

増減は右の通りで、$k=-\dfrac{1}{3}$ において最大。　$f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=1+\dfrac{2-1}{1-1+\dfrac{1}{3}}=4$

$\dfrac{b}{a}<-\dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{3M(a,\,b)}{a^2+3ab+3b^2}=\dfrac{3b^2}{a^2+3ab+3b^2}=\dfrac{3k^2}{1+3k+3k^2}$

$k<-\dfrac{1}{2}$ において、$g(k)=\dfrac{3k^2}{1+3k+3k^2}$ の増減を考える。$k<-\dfrac{1}{2}$ のとき、$-2<\dfrac{1}{k}<0$ であるから

$g(k)=\dfrac{3}{\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{3}{k}+3}=\dfrac{3}{\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$ より、$g(k)$ は、$\dfrac{1}{k}=-\dfrac{3}{2}$、$k=-\dfrac{2}{3}$ のとき、最大値4をとる。

以上により、$\dfrac{3M(a,\,b)}{a^2+3ab+3b^2}$ は、$b=-\dfrac{1}{3}a$ または $b=-\dfrac{2}{3}a$ のとき、最大値4をとる。

求める m の最小値は　$\therefore m=4$　……(答)