1997年京大後期理 $\boxed{2}$

(1)

$1 \leqq a_k \leqq 2n$ より　$n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k \leqq 2n^2$　$\therefore n \leqq s_n \leqq 2n^2$ ――①

$n \leqq n^2 < 2n^2$ であるから、$s_n = n^2$ は①を満たす平方数の1つである。

ここで、$(n+1)^2 - 2n^2 = -n^2 + 2n + 1 = -(n-1)^2 + 2$ である。

$n = 1,\ 2$ のとき　$(n+1)^2 - 2n^2 > 0$　$2n^2 < (n+1)^2$

したがって、$s_n \geqq (n+1)^2$ のとき、①は任意の $n$ について成立しない。

また、$n \geqq 2$ のとき、$n - (n-1)^2 = -n^2 + 3n - 1 = -\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$ である。

$n = 2$ のとき　$n - (n-1)^2 > 0$　$(n-1)^2 < n$

したがって、$s_n \leqq (n-1)^2$ のとき、①は任意の $n$ について成立しない。

以上により　$\therefore s_n = n^2$　（証明終）

(2)

$n \geqq 2$ のとき　$s_n - s_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$ であるから、$a_n = 2n - 1$ であり、$1 \leqq a_n \leqq 2n$ を満たす。

$a_k = 2k - 1\ (1 \leqq k \leqq n)$ を示す。このとき $1 \leqq a_k \leqq 2n$ は成立。

$n \geqq 2$ のとき　$s_j = \sum_{k=1}^{j} a_k = \sum_{k=1}^{j} (2k-1) = j(j+1) - j = j^2\ \ (2 \leqq j \leqq n)$　確かに条件を満たす。

$n = 1$ のとき　$s_1 = a_1$ は平方数であり、$1 \leqq a_1 \leqq 2$ より　$\therefore s_1 = a_1 = 1$　$n = 1$ でも成立。

以上により　$\therefore a_k = 2k - 1\ (1 \leqq k \leqq n)$　……（答）