1997 年京大後期理 $\boxed{4}$

(1)

$b=2a^2-1$ ——① $c=2b^2-1$ ——② $a=2c^2-1$ ——③

$a \geqq -1,\ b \geqq -1,\ c \geqq -1$ は明らかである。$a>1$ とすると

①より $b-a=2a^2-a-1=(2a+1)(a-1)>0$ $\therefore b>a>1$

②より $c-b=2b^2-b-1=(2b+1)(b-1)>0$ $\therefore c>b>1$

③より $a-c=2c^2-c-1=(2c+1)(c-1)>0$ $\therefore a>c>1$

ところが、$a<b<c<a$ となり、矛盾する。したがって、$a \leqq 1$ でなければならない。

同様に、$b \leqq 1,\ c \leqq 1$ も示されるので $\therefore |a| \leqq 1,\ |b| \leqq 1,\ |c| \leqq 1$ （証明終）

(2)

$a=\cos\theta$ とすると

$b=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$ $c=2\cos^2 2\theta-1=\cos 4\theta$ $a=2\cos^2 4\theta-1=\cos 8\theta$

$\therefore \cos\theta=\cos 8\theta$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で、$\cos\theta=\cos 8\theta$ を満たす θ を考える。

$\cos\theta-\cos 8\theta=2\sin\frac{9}{2}\theta\sin\frac{7}{2}\theta=0$ より、$\sin\frac{9}{2}\theta=0$ または $\sin\frac{7}{2}\theta=0$。

$\sin\frac{9}{2}\theta=0$ のとき $0 \leqq \frac{9}{2}\theta < 9\pi$ より

$\frac{9}{2}\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,\ 6\pi,\ 7\pi,\ 8\pi$ $\therefore \theta=0,\ \frac{2}{9}\pi,\ \frac{4}{9}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{8}{9}\pi,\ \frac{10}{9}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{14}{9}\pi,\ \frac{16}{9}\pi$

$\cos\alpha=\cos(2\pi-\alpha)$ であるから、このうち $\cos\theta$ が相違なるものは $\therefore \theta=0,\ \frac{2}{9}\pi,\ \frac{4}{9}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{8}{9}\pi$

$\sin\frac{7}{2}\theta=0$ のとき $0 \leqq \frac{7}{2}\theta < 7\pi$ より

$\frac{7}{2}\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,\ 6\pi$ $\therefore \theta=0,\ \frac{2}{7}\pi,\ \frac{4}{7}\pi,\ \frac{6}{7}\pi,\ \frac{8}{7}\pi,\ \frac{10}{7}\pi,\ \frac{12}{7}\pi$

このうち $\cos\theta$ が相違なるものは $\therefore \theta=0,\ \frac{2}{7}\pi,\ \frac{4}{7}\pi,\ \frac{6}{7}\pi$

以上により、$\cos\theta$ が相違なる θ は $\therefore \theta=0,\ \frac{2}{9}\pi,\ \frac{2}{7}\pi,\ \frac{4}{9}\pi,\ \frac{4}{7}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{6}{7}\pi,\ \frac{8}{9}\pi$

これより、相違なる実数 $a=\cos\theta$ が 8 個定まる。

$a=\cos\theta$ が定まれば、$b=\cos 2\theta,\ c=\cos 4\theta$ が 1 通りに定まる。

したがって、8 組の相違なる実数解を持つことが示された。（証明終）