1997 年京大後期理 $\boxed{5}$

n 回の試行後、青のカードの枚数が k 枚 $(3 \leqq k \leqq n+3)$ である確率を $p_n(k)$ とすると

$$E(n)=\sum_{k=3}^{n+3} k\,p_n(k)$$

n 回の試行後、青のカードの枚数が k 枚であるとき、$n+1$ 回の試行後の青のカードの枚数の期待値は

$$E_k(n+1)=p_n(k)\times\left\{\frac{k}{n+6}\cdot(k+1)+\frac{n+6-k}{n+6}\cdot k\right\}=\frac{n+7}{n+6}k\,p_n(k)$$

であるから

$$E(n+1)=\sum_{k=3}^{n+3}E_k(n+1)=\frac{n+7}{n+6}\sum_{k=3}^{n+3}k\,p_n(k)=\frac{n+7}{n+6}E(n) \qquad \therefore E(n+1)=\frac{n+7}{n+6}E(n)$$

$$E(n)=\frac{n+6}{n+5}E(n-1)=\frac{n+6}{n+5}\cdot\frac{n+5}{n+4}\cdot E(n-2)=\frac{n+6}{n+5}\cdot\frac{n+5}{n+4}\cdot\cdots\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{8}{7}E(1)=\frac{n+6}{7}E(1)$$

$E(1)=\dfrac{3}{6}\cdot 3+\dfrac{3}{6}\cdot 4=\dfrac{7}{2}$ であるから　$\therefore E(n)=\dfrac{n+6}{2}$　……(答)

$n=1$ でも成立。

(注 1)

期待値の定義通りに求めようとすると、

$$p_n(k)={}_nC_{k-3}\frac{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+5-k)\times 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(k-1)}{6\cdot 7\cdot\cdots\cdot(n+5)}=\frac{n!}{(n+3-k)!(k-3)!}\cdot\frac{5!(n+5-k)!(k-1)!}{4(n+5)!}$$
$$=\frac{30(n+4-k)(n+5-k)(k-2)(k-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$$

$$E(n)=\sum_{k=3}^{n+3}k\,p_n(k)=30\sum_{k=3}^{n+3}\frac{k(k-2)(k-1)(n+4-k)(n+5-k)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}=30\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(n+1-k)(n+2-k)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^4,\ \sum_{k=0}^{n}k^5$ を計算する必要があり、大変である。

(注 2)

問題文は「$E(n)$ を求めよ」となっており、$E(n)$ に関する漸化式を立てさせるのが出題者の意図と思われるが、本問はいわゆる「ポリアの壺」を題材としており、以下のようにも求められる。

n 回目までの各試行において、青のカードを取り出す確率は $\dfrac{1}{2}$ で、一定(証明は省略)。

確率変数 $X_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ は、i 回目に青のカードを取り出したとき 1 をとり、それ以外のとき 0 をとるとする。

n 回の試行後に増える、青のカードの枚数は、$X=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$ と表せる。

求める期待値は　$E(3+X)=E\left(3+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=3+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$　$E(X_i)=\dfrac{1}{2}$ であるから　$\therefore E(3+X)=3+\dfrac{n}{2}$