1997 年京大後期理 $\boxed{6}$

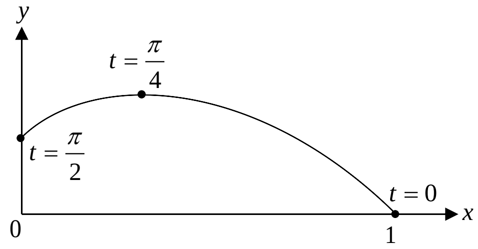
(1)

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t=-e^{-t}(\cos t+\sin t) \qquad \frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=e^{-2t}\left\{(\cos t+\sin t)^2+(\cos t-\sin t)^2\right\}=2e^{-2t}(\cos^2 t+\sin^2 t)=2e^{-2t}$$

$$\therefore L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-t}dt=\sqrt{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}(1-e^{-\frac{\pi}{2}}) \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)



(解答 1)

(1) より、$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ において $\frac{dx}{dt}\leqq 0$ である。$y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_0^1 y\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0(e^{-t}\sin t)e^{-t}(\cos t+\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{-2t}\sin t\cos t+e^{-2t}\sin^2 t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t+e^{-2t}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}(\sin 2t-\cos 2t)dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)dt+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)dt+\frac{1}{4}(1-e^{-\pi})$$

ここで、$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)dt$ とすると

$$I=\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}(1+e^{-\pi})+\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2t}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)dt=-\frac{\sqrt{2}}{4}(1+e^{-\pi})+\frac{\sqrt{2}}{4}(1+e^{-\pi})-I=-I$$

$$2I=0 \quad \therefore I=0 \quad \therefore S=\frac{1}{4}(1-e^{-\pi}) \quad \cdots\cdots(答)$$

(解答 2)

C は極座標で $r=e^{-\theta}$ と表せるから　$\therefore S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}(1-e^{-\pi})$ ……(答)

(注)

2001 年後期理 $\boxed{6}$ と同様に、極座標の面積公式の使用が許されるのかは、グレーと思われる。