1997年京大後期理 $\boxed{3}$ 文 $\boxed{3}$ 共通

(1)

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ より　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$　$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|^2$ ——①

$$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

同様に、$\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|^2=2+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$ であるから、①より

$$2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}\quad\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}\ \text{——②}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

同様に、$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2=2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$ であるから、②より　$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{CD}\right|^2$　$\therefore\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$　(証明終)

(2)

$$\overrightarrow{B'A}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\quad\overrightarrow{CD'}=\overrightarrow{OD'}-\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\quad\therefore\overrightarrow{B'A}=\overrightarrow{CD'}$$

これより、A, B', C, D' が互いに異なるならば、これら4点は、この順で平行四辺形の頂点である。
これら4頂点のうち、いずれか1つが直角であることを示せばよい。

$\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'A}\cdot\overrightarrow{B'C}&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2\\&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+1=-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+1\\&=-\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}\end{aligned}$$

②より　$\therefore\overrightarrow{B'A}\cdot\overrightarrow{B'C}=0$

したがって、$\angle AB'C$ は直角であり、題意は示された。(証明終)