1997 年京大理 $\boxed{2}$

${}_nC_1 = {}_nC_{n-1} = n = pq$ であり、 $p,\ q$ は相違なる素数であるから、 $n-1$ 個の数 ${}_nC_k\ (1 \leqq k \leqq n-1)$ の最大公約数は、 $1,\ p,\ q,\ pq$ のいずれかである。

$1 < p < q$ とすると

$${}_nC_p = {}_{pq}C_p = \frac{pq(pq-1)(pq-2)\cdots(pq-p+1)}{p!} = q \cdot \frac{(pq-1)(pq-2)\cdots(pq-p+1)}{(p-1)!}$$

$pq-p < pq-p+1 < \cdots < pq-1 < pq$ より、 $pq-p+1,\ \cdots,\ pq-2,\ pq-1$ はいずれも p を約数に持たない。
$(pq-1)(pq-2)\cdots(pq-p+1)$ は連続した $p-1$ 個の自然数の積であり、 $(p-1)!$ で割り切れる。
したがって、 ${}_nC_p$ は q を約数に持つが、 p を約数に持たない。

$${}_nC_q = {}_{pq}C_q = \frac{pq(pq-1)(pq-2)\cdots(pq-q+1)}{q!} = p \cdot \frac{(qp-1)(qp-2)\cdots(qp-q+1)}{(q-1)!}$$

$qp-q < pq-q+1 < \cdots < qp-1 < qp$ より、 $qp-q+1,\ \cdots,\ qp-2,\ qp-1$ はいずれも q を約数に持たない。
$(qp-1)(qp-2)\cdots(qp-q+1)$ は連続した $q-1$ 個の自然数の積であり、 $(q-1)!$ で割り切れる。
したがって、 ${}_nC_q$ は p を約数に持つが、 q を約数に持たない。

以上により、 $n-1$ 個の数 ${}_nC_k\ (1 \leqq k \leqq n-1)$ の最大公約数は、1 しかあり得ない。（証明終）