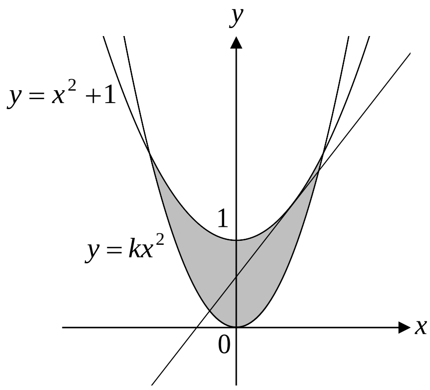
1997年京大理 $\boxed{3}$

(1)

$y=x^2+1$ を C_1、$y=kx^2$ を C_2 とする。C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$$kx^2=x^2+1 \quad (k-1)x^2=1 \quad x^2=\frac{1}{k-1} \quad \therefore x=\pm\frac{1}{\sqrt{k-1}}$$



C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積は、対称性より

$$2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k-1}}}(x^2+1-kx^2)dx=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k-1}}}\left\{-(k-1)x^2+1\right\}dx=2\left[-\frac{k-1}{3}x^3+x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{k-1}}}$$

$$=2\left\{-\frac{1}{3\sqrt{k-1}}+\frac{1}{\sqrt{k-1}}\right\}=\frac{4}{3\sqrt{k-1}}$$

P における C_1 の接線 L は　$y=2a(x-a)+a^2+1=2ax-a^2+1$

L と C_2 が相違なる 2 つの実数解を持つとき、$kx^2=2ax-a^2+1$ とすると　$kx^2-2ax+a^2-1=0$

$$D/4=a^2-k(a^2-1)=k-(k-1)a^2>0 \quad a^2<\frac{k}{k-1} \quad \text{——①}$$

①の条件下で、L と C_2 の交点の x 座標を、$\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると　$\alpha+\beta=\dfrac{2a}{k},\ \alpha\beta=\dfrac{a^2-1}{k}$

L と C_2 で囲まれた部分の面積は　$\displaystyle\int_\alpha^\beta(2ax-a^2+1-kx^2)dx=-k\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\dfrac{4a^2}{k^2}-\dfrac{4(a^2-1)}{k}=\dfrac{4\left\{a^2-k(a^2-1)\right\}}{k^2}=\dfrac{4\left\{k-(k-1)a^2\right\}}{k^2}$ より

$$\frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{k}{6}\cdot\frac{8}{k^3}\left\{k-(k-1)a^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3k^2}\left\{k-(k-1)a^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3\sqrt{k-1}}$$

$$\left\{k-(k-1)a^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\frac{k^2}{2\sqrt{k-1}} \quad \left\{k-(k-1)a^2\right\}^3=\frac{k^4}{4(k-1)} \quad k-(k-1)a^2=\frac{k^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{4(k-1)}}=k\cdot\sqrt[3]{\frac{k}{4(k-1)}}$$

$$(k-1)a^2=k\left(1-\sqrt[3]{\frac{k}{4(k-1)}}\right) \quad a^2=\frac{k}{k-1}\left(1-\sqrt[3]{\frac{k}{4(k-1)}}\right)$$

$a^2\geqq 0$ であるとき　$1-\sqrt[3]{\dfrac{k}{4(k-1)}}\geqq 0 \quad 1\geqq\dfrac{k}{4(k-1)} \quad 4k-4\geqq k \quad 3k\geqq 4 \quad \therefore k\geqq\dfrac{4}{3}$

$1<k<\dfrac{4}{3}$ のとき、題意を満たす a^2 は存在しない。$k\geqq\dfrac{4}{3}$ のとき $a^2=\dfrac{k}{k-1}\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{k}{4(k-1)}}\right)$ ……(答)

(2)

$k\geqq\dfrac{4}{3}$ で考えてよく、$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{k}}=1$ であるから　$\displaystyle\therefore\lim_{k\to\infty}a^2=1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ……(答)