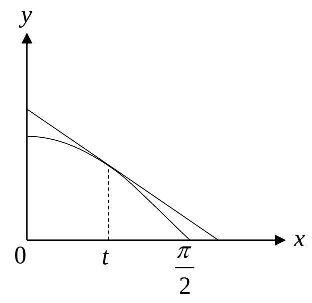
1997 年京大理 $\boxed{6}$

(1)




$y=\cos x$ 上の点 $(t,\ \cos t)$ における接線は

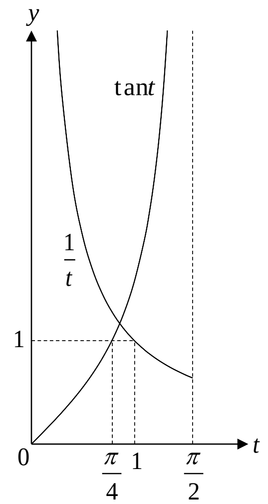
$y=-\sin t(x-t)+\cos t=-(\sin t)x+t\sin t+\cos t$

これと $y$ 軸との交点は　$(0,\ t\sin t+\cos t)$

$x$ 軸との交点は、$(\sin t)x=t\sin t+\cos t$ より　$\therefore\left(\dfrac{t\sin t+\cos t}{\sin t},\ 0\right)$

$\therefore S(t)=\dfrac{(t\sin t+\cos t)^2}{2\sin t}$ ……(答)

(2)




$$S'(t)=\frac{2(t\sin t+\cos t)(\sin t+t\cos t-\sin t)\sin t-(t\sin t+\cos t)^2\cos t}{2\sin^2 t}$$
$$=\frac{\cos t\,(t\sin t+\cos t)(t\sin t-\cos t)}{2\sin^2 t}$$

$f(t)=t\sin t-\cos t=0$ とすると　$\tan t=\dfrac{1}{t}$

グラフより、$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ において、$\tan t=\dfrac{1}{t}$ を満たす $t$ がただ 1 つ存在する。

これを $t=t_0$ とすると、$S(t)$ の増減は右の通り。

| $t$ | 0 | $\cdots$ | $t_0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $S(t)$ | | ↘ | | ↗ | |

$\dfrac{\pi}{4}<1$ より　$1=\tan\dfrac{\pi}{4}<\tan 1$　$\cos 1<\sin 1$　$\therefore f(1)=\sin 1-\cos 1>0$

これと $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(\dfrac{\pi}{4}-1\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}}<0$ より　$\therefore \dfrac{\pi}{4}<t_0<1$　(証明終)

(3)

$\tan t_0=\dfrac{1}{t_0}$ より　$t_0\sin t_0=\cos t_0$ であるから

$$\therefore S(t_0)=\frac{(2\cos t_0)^2}{2\sin t_0}=\frac{2\cos^2 t_0}{\sin t_0}=2\cos^2 t_0\cdot\frac{t_0}{\cos t_0}=2t_0\cos t_0$$

$g(t)=2t\cos t$ とすると　$g'(t)=2(\cos t-t\sin t)$

(2) より、$g'(t)=-2f(t)$ と書けて、$g'(t_0)=0$ である。

$g(t)$ の増減は右の通り。$0<t\leqq t_0$ において単調増加であるから

| $t$ | 0 | $\cdots$ | $t_0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $g(t)$ | | ↗ | | ↘ | |

$g(t_0)>g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$　$\therefore S(t_0)>\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$　(証明終)