1997年京大理$\boxed{5}$文$\boxed{5}$共通

(1)

Aの2回目までの合計が2である確率はp^2である。

3回目を行い、得点が3になる確率はp^3、得点が5になる確率は$p^2(1-p)$。

得点が4になる確率は$2p(1-p)$、得点が6になる確率は$(1-p)^2$。

$$E_A = 3p^3 + 4\cdot 2p(1-p) + 5p^2(1-p) + 6(1-p)^2 = 3p^3 + 8p - 8p^2 + 5p^2 - 5p^3 + 6 - 12p + 6p^2$$
$$= -2p^3 + 3p^2 - 4p + 6 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

Bの得点が3である確率は、同様にp^3。

得点が5になるのは、2回目まで2で3回目に3を引くか、2回目まで4で3回目に1を引くかのいずれかであるから、確率は　$p^2\times(1-p) + 2p(1-p)\times p = 3p^2(1-p)$

得点が6になる確率は、同様に$(1-p)^2$であるから

$$E_B = 3p^3 + 5(3p^2 - 3p^3) + 6(1-p)^2 = 3p^3 + 15p^2 - 15p^3 + 6 - 12p + 6p^2$$
$$= -12p^3 + 21p^2 - 12p + 6 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$E_A - E_B = 10p^3 - 18p^2 + 8p = 2p(5p^2 - 9p + 4) = 2p(p-1)(5p-4) > 0$ より　$\therefore 0 < p < \dfrac{4}{5}$ ……(答)

(2)

Aが0点になることはない。Bは2回目まで4で3回目に3を引くと0点になる。

Bが0点になる確率は　$2p(1-p)\times(1-p) = 2p(1-p)^2$

Aが勝つのは、Aが6点でBが5点、Aが6点でBが3点、Aが5点でBが3点、Aが4点でBが3点、Bが0点のいずれかの場合であるから

$$P_A = (1-p)^2\times 3p^2(1-p) + (1-p)^2\times p^3 + p^2(1-p)\times p^3 + 2p(1-p)\times p^3 + 2p(1-p)^2$$
$$= p(1-p)\left\{3p(1-2p+p^2) + (p^2-p^3) + p^4 + 2p^3 + 2 - 2p\right\}$$
$$= p(1-p)(p^4 + 4p^3 - 5p^2 + p + 2)$$

Bが勝つのは、Aが3点でBが5点、Aが4点でBが5点、Aが3点でBが6点、Aが4点でBが6点、Aが5点でBが6点のいずれかの場合であるから

$$P_B = p^3\times 3p^2(1-p) + 2p(1-p)\times 3p^2(1-p) + p^3\times(1-p)^2 + 2p(1-p)\times(1-p)^2 + p^2(1-p)\times(1-p)^2$$
$$= p(1-p)\left\{3p^4 + 7p^2(1-p) + 2(1-2p+p^2) + p(1-2p+p^2)\right\}$$
$$= p(1-p)(3p^4 - 6p^3 + 7p^2 - 3p + 2)$$

$$P_A - P_B = p(1-p)(p^4 + 4p^3 - 5p^2 + p + 2 - 3p^4 + 6p^3 - 7p^2 + 3p - 2) = p(1-p)(-2p^4 + 10p^3 - 12p^2 + 4p)$$
$$= 2p^2(1-p)(-p^3 + 5p^2 - 6p + 2) = 2p^2(1-p)^2(p^2 - 4p + 2)$$

$P_A - P_B > 0$となるには　$p^2 - 4p + 2 > 0$　$\left\{p-(2-\sqrt{2})\right\}\left\{p-(2+\sqrt{2})\right\} > 0$　$\therefore 0 < p < 2-\sqrt{2}$

$2-\sqrt{2} < \dfrac{4}{5}$であるから、$E_A > E_B$ならば$P_A > P_B$とは言えない。……(答)