1998 年京大後期文 $\boxed{4}$

(1)

$$\sin 3\theta = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta = 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$2\sin 3\theta - 2\cos 2\theta - 1 = 2(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) - 2(1-2\sin^2\theta) - 1 = -8\sin^3\theta + 4\sin^2\theta + 6\sin\theta - 3 > 0$$

$$8\sin^3\theta - 4\sin^2\theta - 6\sin\theta + 3 = (2\sin\theta - 1)(4\sin^2\theta - 3) = 8\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)\left(\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$$

$-1 \leqq \sin\theta < -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2} < \sin\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であればよい。

求める範囲は　$\therefore 30° < \theta < 60°,\ 120° < \theta < 150°,\ 240° < \theta < 300°$　……(答)

(2)

$f(t) = -8t^3 + 4t^2 + 6t - 3$ として、$-1 \leqq t \leqq 1$ における増減を調べる。

$$f'(t) = -24t^2 + 8t + 6 = -24\left(t - \frac{1-\sqrt{10}}{6}\right)\left(t - \frac{1+\sqrt{10}}{6}\right)$$

増減は右の通り。$-1 < \dfrac{1-\sqrt{10}}{6} < 0 < \dfrac{1+\sqrt{10}}{6} < 1$ であるから、

$t = \dfrac{1-\sqrt{10}}{6}$ で極小、$t = \dfrac{1+\sqrt{10}}{6}$ で極大となる。

t	…	$\frac{1-\sqrt{10}}{6}$	…	$\frac{1+\sqrt{10}}{6}$	…
$f'(t)$	−	0	＋	0	−
$f(t)$	↘		↗		↘

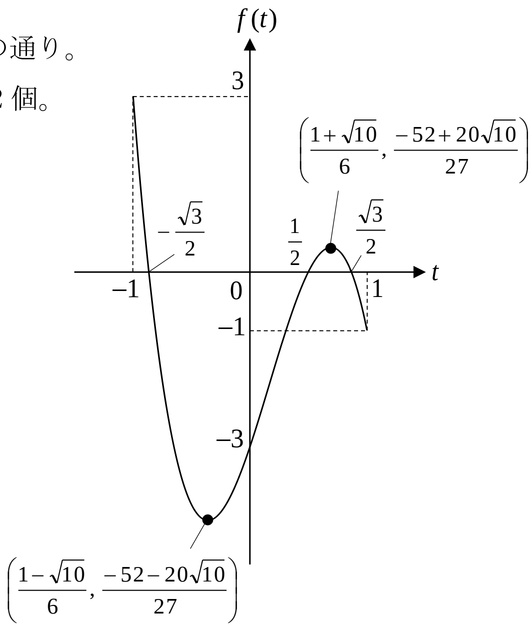
$f(t) = -8\left(t^2 - \dfrac{1}{3}t - \dfrac{1}{4}\right)\left(t - \dfrac{1}{6}\right) + \dfrac{40}{9}t - \dfrac{8}{3}$ より

$$f\left(\frac{1-\sqrt{10}}{6}\right) = \frac{40}{9}\cdot\frac{1-\sqrt{10}}{6} - \frac{8}{3} = \frac{-52-20\sqrt{10}}{27} \qquad f\left(\frac{1+\sqrt{10}}{6}\right) = \frac{40}{9}\cdot\frac{1+\sqrt{10}}{6} - \frac{8}{3} = \frac{-52+20\sqrt{10}}{27}$$

$f(-1) = 3,\ f(1) = -1$ より、$-1 \leqq t \leqq 1$ におけるグラフの概形は右図の通り。

$t = \sin\theta$ を満たす θ の個数は、$t = \pm 1$ のとき 1 個、$-1 < t < 1$ のとき 2 個。

これを踏まえて、a が変化したときの、解 θ の個数は



$a < \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ 3 < a$ のとき　0 個

$a = 3$ のとき　1 個

$a = \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} < a < 3$ のとき　2 個

$\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27} < a < -1,\ a = \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27}$ のとき　4 個

$a = -1$ のとき　5 個

$-1 < a < \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27}$ のとき　6 個

……(答)