1998 年京大後期理 $\boxed{1}$

(1)

A と AB は交換可能なので　$A(AB)=(AB)A$　$\therefore A^2B=ABA$ ——①

A に逆行列が存在するとき、①の両辺に左から A^{-1} をかけると　$AB=BA$

これは、A と B は交換可能ではないことに矛盾する。

したがって、A に逆行列は存在しないので　$\therefore \det A=ad-bc=0$　（証明終）

(2)

A と BA は交換可能なので　$A(BA)=(BA)A$　$\therefore ABA=BA^2$ ——②

①、②より　$\therefore A^2B=BA^2$ ——③

ケーリー・ハミルトンの定理および(1)より　$A^2=(a+d)A-(ad-bc)E=(a+d)A$

③に代入すると　$(a+d)AB=(a+d)BA$　$(a+d)(AB-BA)=O$

A と B は交換可能ではないので、$AB-BA\neq O$ であるから　$\therefore a+d=0$　$\therefore A^2=O$　（証明終）