1998年京大後期理 $\boxed{5}$

(1)

$n=2$ のとき

経路が一本も存在しないのは、横辺 A_1A_2 と横辺 B_1B_2 に、ともに×印が描かれているときであるから、

余事象より　$\therefore Q_2=1-(1-p)^2=2p-p^2$ ……(答)

$n=3$ のとき　$B_3(3, 2)$ に到達するには、

　ⅰ) $B_2(2, 2)$ に到達可能で、なおかつ横辺 B_2B_3 に「→」が描かれている。

　ⅱ) $A_3(3, 1)$ に到達可能で、最後に縦辺 A_3B_3 に沿って上に移動する。

のいずれかである。

ⅰ)の場合の確率は、pQ_2 に等しい。

ⅱ)の場合、2本の横辺 A_1A_2, A_2A_3 に、ともに「→」が描かれているが、横辺 B_2B_3 にも「→」が描かれているとき、ⅰ)の場合に含まれる。

したがって　$\therefore Q_3=pQ_2+p^2-p^3=2p^2-p^3-p^2-p^3=3p^2-2p^3$ ……(答)

(2)

$n=3$ のときと同様に考えて、$B_n(n, 2)$ に到達するには、

　ⅰ) $B_{n-1}(n-1, 2)$ に到達可能で、なおかつ横辺 $B_{n-1}B_n$ に「→」が描かれている。

　ⅱ) $A_n(n, 1)$ に到達可能で、最後に縦辺 A_nB_n に沿って上に移動する。

のいずれかである。

ⅰ)の場合の確率は、pQ_{n-1} に等しい。

ⅱ)の場合、$n-1$ 本の横辺 A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$, $A_{n-1}A_n$ に、ともに「→」が描かれているが、横辺 $B_{n-1}B_n$ にも「→」が描かれているとき、ⅰ)の場合に含まれる。

$$Q_n=pQ_{n-1}+p^{n-1}-p^n=pQ_{n-1}+(1-p)p^{n-1} \qquad \frac{Q_n}{p^n}=\frac{Q_{n-1}}{p^{n-1}}+\frac{1}{p}-1$$

$\dfrac{Q_2}{p^2}=\dfrac{2}{p}-1$ より

$$\frac{Q_n}{p^n}=\frac{2}{p}-1+\left(\frac{1}{p}-1\right)(n-2)=\left(\frac{1}{p}-1\right)n+1 \qquad \therefore Q_n=n(p^{n-1}-p^n)+p^n=np^{n-1}-(n-1)p^n$$

$Q_1=1$ であるから、すべての自然数について成立。　$\therefore Q_n=np^{n-1}-(n-1)p^n$ ……(答)