1998年京大後期理$\boxed{6}$

(1)

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\sin^3\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2\theta-1)^2(1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta$であり、$t=\cos\theta$とすると　$dt=-\sin\theta d\theta$

$$I_2=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2t^2-1)^2(1-t^2)(-dt)=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1(4t^4-4t^2+1)(1-t^2)dt=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1(-4t^6+8t^4-5t^2+1)dt$$

$$=\left[-\frac{4}{7}t^7+\frac{8}{5}t^5-\frac{5}{3}t^3+t\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=-\frac{4}{7}+\frac{8}{5}-\frac{5}{3}+1-\left(-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{8\sqrt{2}}+\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

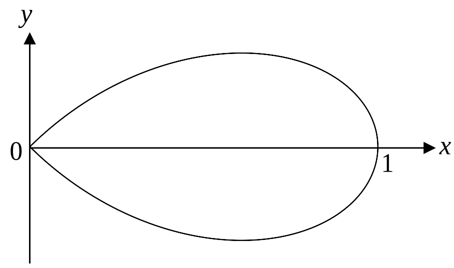
$$=\frac{-60+168-175+105}{105}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{28}+\frac{\sqrt{2}}{5}-\frac{5\sqrt{2}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{38}{105}-\frac{-15+84-175+210}{420}\sqrt{2}$$

$$=\frac{38}{105}-\frac{104}{420}\sqrt{2}=\frac{38-26\sqrt{2}}{105}\quad\cdots\cdots(答)$$

(2)

この曲線を原点中心に$-\frac{\pi}{4}$回転させると

$$r=\sin 2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\theta\quad\left(-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}\right)$$



これはx軸対称であり、この曲線が囲む領域を、x軸中心に回転した立体の体積が、Vに等しい。$x=\cos 2\theta\cos\theta,\ y=\cos 2\theta\sin\theta$であるから

$$V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^0 y^2\left(\frac{dx}{d\theta}\right)d\theta=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^0\cos^2 2\theta\sin^2\theta(-2\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta)d\theta$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^0(-4\cos^2 2\theta\sin^3\theta\cos^2\theta-\cos^3 2\theta\sin^3\theta)d\theta=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4\cos^2 2\theta\sin^3\theta\cos^2\theta+\cos^3 2\theta\sin^3\theta)d\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{2\cos^2 2\theta\sin^3\theta(1+\cos 2\theta)+\cos^3 2\theta\sin^3\theta\right\}d\theta=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2 2\theta\sin^3\theta+3\cos^3 2\theta\sin^3\theta)d\theta$$

$$=3\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 2\theta\sin^3\theta\,d\theta+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\sin^3\theta\,d\theta$$

$\therefore V=3\pi I_3+2\pi I_2$　(証明終)

(注)

Vの計算は可能だが、I_3の計算が煩雑になるため、ここまでにしていると思われる。
それなら、I_2の計算もさせるなという気がするが…。

なお、$I_3=\frac{68\sqrt{2}-94}{315}$であり、$V=\frac{16\sqrt{2}-18}{105}\pi$になる。