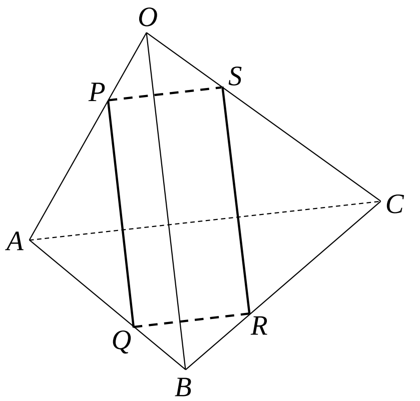
1998年京大理$\boxed{3}$

p, q, r, s は、1より小さい正の実数とする。



$\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{BQ}=q\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BR}=r\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{OS}=s\overrightarrow{OC}$ とすると

$$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OP}=-p\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC} \quad \text{——①}$$

$\overrightarrow{OQ}=q\overrightarrow{OA}+(1-q)\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OR}=(1-r)\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}$ であるから

$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}=-q\overrightarrow{OA}+(q-r)\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC} \quad \text{——②}$$

4点 P, Q, R, S をこの順に結んでできる図形が平行四辺形であるとき、$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}$ である。

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は一次独立であるから、ベクトルの一意性により　$p=q,\ q-r=0,\ s=r$　$\therefore p=q=r=s$

このとき、平行四辺形 $PQRS$ の2本の対角線の交点は、互いの中点であるから、これを L とすると

$$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR})=\frac{p}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1-r}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{r}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{p}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1-p}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{p}{2}\overrightarrow{OC} \quad \text{——③}$$

次に、OB, AC の中点を、それぞれ M, N とすると　$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

線分 MN 上の点 T は、$0<t<1$ として、$\overrightarrow{OT}=(1-t)\overrightarrow{OM}+t\overrightarrow{ON}=\frac{t}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1-t}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{OC}$ と表せる。

したがって、③と比較し、$t=p$ とすれば、L は線分 MN 上にあることがわかる。
以上により、示された。（証明終）

※1981年理$\boxed{2}$とほぼ同一問題。