1999年京大後期文 $\boxed{3}$

$x=k\ (1\leqq k\leqq n)$ のとき、条件を満たす整数 y は　$\log_2 \dfrac{y}{k}\leqq k$　$\dfrac{y}{k}\leqq 2^k$　$\therefore 1\leqq y\leqq k\cdot 2^k$

条件を満たす格子点のうち、$x=k\ (1\leqq k\leqq n)$ であるものの個数は、$k\cdot 2^k$ であるから、

求める個数は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k$ とすると、$S_1=2$ である。

$n\geqq 2$ のとき

$$S_n-2S_n=2+\sum_{k=2}^{n}\left\{k\cdot 2^k-(k-1)\cdot 2^k\right\}-n\cdot 2^{n+1}=2+\sum_{k=2}^{n}2^k-n\cdot 2^{m+1}=\sum_{k=1}^{n}2^n-n\cdot 2^{n+1}=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n\cdot 2^{n+1}$$

$$-S_n=2^{n+1}-2-n\cdot 2^{n+1}\quad \therefore S_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$$

これは $n=1$ でも成立。

求める個数は　$\therefore (n-1)\cdot 2^{n+1}+2$　……(答)