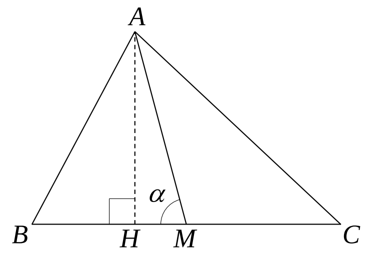
1999年京大文 $\boxed{1}$



$AB \leqq AC$ とする。このとき、点 H は、線分 BM 上にある。

$\angle BMA=\alpha,\ \angle BPA=\theta$ とすると、$\alpha \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり、θ は鋭角か直角である。

余弦定理により

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2AP \cdot BP\cos\theta$$
$$AC^2 = AP^2 + CP^2 - 2AP \cdot CP\cos(\pi-\theta) = AP^2 + CP^2 + 2AP \cdot CP\cos\theta$$

辺々足すと

$$AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + BP^2 + CP^2 + 2AP(CP - BP)\cos\theta$$

$BP \leqq CP$ であり、$\alpha \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta \geqq 0$ であるから

$$2AP(CP-BP)\cos\theta \geqq 0 \qquad \therefore AB^2 + AC^2 \geqq 2AP^2 + BP^2 + CP^2$$

$AB \geqq AC$ としても同様に示されるから　$\therefore AB^2 + AC^2 \geqq 2AP^2 + BP^2 + CP^2$　（証明終）

等号成立は、$CP = BP$ または $\cos\theta = 0$ であるから、点 P が点 M か点 H に一致するとき。

※最初はベクトルの利用を考えたが、幾何で考えた方が簡明である。