1999年京大文 $\boxed{3}$

(1)

$C(nx)=C(ny)$ のとき、$nx-ny=n(x-y)$ は 100 の倍数である。

$100=2^2 5^2$ であり、n は 2 でも 5 でも割り切れないから、100 と n は互いに素。

したがって、$x-y$ が 100 の倍数でなければならない。

今、$x=100a+b,\ y=100c+d$ とする。ここで、$a\geqq 0,\ c\geqq 0,\ 0\leqq b\leqq 99,\ 0\leqq d\leqq 99$ である。

$x-y=100(a-c)+b-d$ であるから、$x-y$ が 100 の倍数であるとき、$b-d$ は 100 の倍数である。

$-99\leqq b-d\leqq 99$ であるから、$b-d=0$ しかあり得ない。

したがって、$b=d$ であるから　$\therefore C(x)=C(y)$　（証明終）

(2)

$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 99$ について調べれば、十分である。

$C(0),\ C(n),\ C(2n),\ \cdots,\ C(99n)$ の中に重複する値があると仮定する。

このとき、ある $i,\ j\ (i\neq j)$ が存在し、$C(ni)=C(nj)$ が成立する。

ところが、(1)より、$C(ni)=C(nj)$ のとき $C(i)=C(j)$ であるから、矛盾する。

したがって、$C(0),\ C(n),\ C(2n),\ \cdots,\ C(99n)$ には、$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 99$ のすべての値が現れる。

すなわち、$C(nx)=1$ となる x が存在する。（証明終）

(注)

(2)は、不定方程式 $nx-100y=1$ の整数解 $(x,\ y)$ が存在することを示せ、とも言い換えられる。

一般に、a と b が互いに素である整数のとき、$ax+by=1$ を満たす整数解 $(x,\ y)$ が存在する。

本問の場合、100 と n は互いに素であるから、$nx-100y=1$ の整数解 $(x,\ y)$ が存在する。