1999 年京大文 $\boxed{4}$

(1)

複素数 z が単位円上にあるとき、$|z|=1$ であるから　$|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2 = z\overline{z}=1 \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{1}{z}$

逆に、$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ のとき　$\overline{z}=\dfrac{1}{z} \Leftrightarrow z\overline{z}=|z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$　以上により示された。(証明終)

(2)

(1) より

$$\overline{w}=\frac{(\overline{z_1}-\overline{z_3})(\overline{z_2}-\overline{z_4})}{(\overline{z_1}-\overline{z_4})(\overline{z_2}-\overline{z_3})}=\frac{\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_3}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_4}\right)}{\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_4}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_3}\right)}=\frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_4-z_1)(z_3-z_2)}=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=w$$

$\therefore \overline{w}=w$

したがって、w は実数である。(証明終)

(3)

$w=\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$ を、z_4 について解くと

$w(z_1-z_4)(z_2-z_3)=(z_1-z_3)(z_2-z_4)$　$\{(z_2-z_3)w-(z_1-z_3)\}z_4=(z_2-z_3)z_1w-(z_1-z_3)z_2$

$$\therefore z_4=\frac{(z_2-z_3)z_1w-(z_1-z_3)z_2}{(z_2-z_3)w-(z_1-z_3)}$$

w は実数であり、$\overline{w}=w$ であるから

$$\overline{z_4}=\frac{(\overline{z_2}-\overline{z_3})\overline{z_1}w-(\overline{z_1}-\overline{z_3})\overline{z_2}}{(\overline{z_2}-\overline{z_3})w-(\overline{z_1}-\overline{z_3})}=\frac{\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_3}\right)\dfrac{w}{z_1}-\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_3}\right)\dfrac{1}{z_2}}{\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_3}\right)w-\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_3}\right)}=\frac{(z_3-z_2)w-(z_3-z_1)}{(z_3-z_2)z_1w-(z_3-z_1)z_2}$$

$$=\frac{(z_2-z_3)w-(z_1-z_3)}{(z_2-z_3)z_1w-(z_1-z_3)z_2}=\frac{1}{z_4}$$

$\therefore z_4\overline{z_4}=|z_4|^2=1$　$\therefore |z_4|=1$

したがって、z_4 は単位円上にある。(証明終)