1999年京大後期理 $\boxed{2}$

$\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ より、$\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$ であるから　$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$

さらに、$\alpha+\beta=\theta\ (0<\theta<\pi)$ とすると　$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin\alpha\sin(\theta-\alpha)\sin\theta$

θ を固定したとき、$0<\alpha<\theta$ における $\sin\alpha\sin(\theta-\alpha)$ の最大値を考える。

$$\sin\alpha\sin(\theta-\alpha)=\frac{1}{2}\left\{\cos(\theta-\alpha-\alpha)-\cos(\theta-\alpha+\alpha)\right\}=\frac{1}{2}\cos(\theta-2\alpha)-\frac{1}{2}\cos\theta$$

$-\pi<-\theta<\theta-2\alpha<\theta<\pi$ より　$\therefore -1<\cos(\theta-2\alpha)\leqq 1$

$\sin\alpha\sin(\theta-\alpha)$ が最大となるのは、$\cos(\theta-2\alpha)=1$ のとき、すなわち $\theta-2\alpha=0$、$\alpha=\dfrac{\theta}{2}$ のときであるから

$$\therefore \sin\alpha\sin(\theta-\alpha)\leqq\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}\qquad \therefore \sin\alpha\sin(\theta-\alpha)\sin\theta\leqq\frac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{2}=\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin\theta-\dfrac{1}{4}\sin 2\theta$ とすると

$$f'(\theta)=\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta=\frac{1}{2}(\cos\theta-2\cos^2\theta+1)=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)(2\cos\theta+1)$$

$f(\theta)$ の増減は右の通りで、$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき最大となる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		＋	0	－	
$f(\theta)$		↗		↘	

$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ は、$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大となるから、

最大値は $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ ……(答)