1999年京大後期理$\boxed{3}$

(1)

$2a_{n+1}=\alpha\{(3a_n-b_n)(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\},\ 2b_{n+1}=\alpha\{-(a_n+b_n)^2-(a_n-b_n)\}$より

$2a_2=4\alpha,\ 2b_{n+1}=-4\alpha \quad \therefore a_2=2\alpha,\ b_2=-2\alpha$ ……(答)

$2a_3=2b_3=-4\alpha^2 \quad \therefore a_3=b_3=-2\alpha^2$ ……(答)

$2a_4=16\alpha^5,\ 2b_4=-16\alpha^5 \quad \therefore a_4=8\alpha^5,\ b_4=-8\alpha^5$ ……(答)

(2)

nが奇数のとき$a_n-b_n=0$、nが偶数のとき$a_n+b_n=0$と予想できるので、数学的帰納法で示す。

$n=1,\ 2$のとき、成立。

$n=2k-1$のとき、$a_{2k-1}=b_{2k-1}=c$と仮定すると

$2a_{2k}=4c\alpha,\ 2b_{2k}=-4c\alpha \quad a_{2k}=2c\alpha,\ b_{2k}=-2c\alpha \quad \therefore a_{2k}+b_{2k}=0$

$2a_{2k+1}=2b_{2k+1}=-4c\alpha^2 \quad a_{2k+1}=b_{2k+1}=-2c\alpha^2 \quad \therefore a_{2k+1}-b_{2k+1}=0$

したがって、$n=2k,\ 2k+1$においても成立。

上記の議論より、cの値に関わらず、$\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=-\alpha$であるから $\quad \therefore \dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}}=-\alpha$ ……(答)