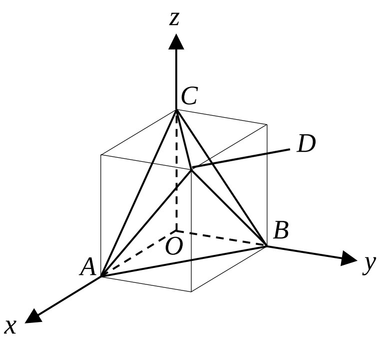
1999年京大後期理 $\boxed{4}$



空間座標系において、右図のような直方体を考える。

$A(s,\ 0,\ 0),\ B(0,\ t,\ 0),\ C(0,\ 0,\ u),\ D(s,\ t,\ u)\ (s>0,\ t>0,\ u>0)$ とする。

$\triangle ABC$ は鋭角三角形であり、$BC=a,\ CA=b,\ AB=c$ とする。

このとき、$BC=DA=a,\ CA=BD=b,\ AB=CD=c$ であるから、

$A,\ B,\ C,\ D$ を頂点とする四面体の各面は、合同である。

このような $s,\ t,\ u$ が存在するか調べる。

$$\begin{cases} BC^2=a^2=t^2+u^2 \\ CA^2=b^2=u^2+s^2 \\ AB^2=c^2=s^2+t^2 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} s^2=\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) \\ t^2=\dfrac{1}{2}(c^2+a^2-b^2) \\ u^2=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) \end{cases}$$

$\triangle ABC$ は鋭角三角形であるから　$b^2+c^2-a^2>0,\ c^2+a^2-b^2>0,\ a^2+b^2-c^2>0$

したがって、実数 $s,\ t,\ u$ が確かに存在する。

以上により、任意の鋭角三角形 $\triangle ABC$ について、各面すべてが $\triangle ABC$ と合同な四面体が存在する。(証明終)

※等面四面体の性質を知っていれば、大幅に有利。