1999 年京大後期理 $\boxed{5}$

$x=u+v\sqrt{3}$ を、$x^2+ax+b=0$ に代入すると

$$(u+v\sqrt{3})^2+a(u+v\sqrt{3})+b$$
$$=u^2+2uv\sqrt{3}+3v^2+au+av\sqrt{3}+b=u^2+3v^2+au+b+(2uv+av)\sqrt{3}=0$$

ここで、$2uv+av\neq 0$ と仮定すると、$u^2+3v^2+au+b\neq 0$ であり、

$$\sqrt{3}=-\frac{u^2+3v^2+au+b}{2uv+av}$$

a, b, u, v はいずれも有理数であるから、右辺は有理数であるが、左辺 $\sqrt{3}$ は無理数であるから、矛盾する。

したがって　$(2u+a)v=0$ ――① 　$u^2+3v^2+au+b=0$ ――② 　①より、$v=0$ または $2u+a=0$ 。

ここで、$u=\dfrac{q}{p},\ v=\dfrac{s}{r}$ とする。p と q 、r と s は互いに素な整数であり、$p>0,\ r>0$ である。

$v=0$ のとき　v は整数であり、②より $u^2+au+b=0$ であるから

$$\frac{q^2}{p^2}+a\cdot\frac{q}{p}+b=0 \quad q^2+apq+bp^2=0 \quad \therefore bp^2=-q(q+ap) \text{ ――③}$$

$p\neq 1$ と仮定する。③の左辺が p で割り切れるから、③の右辺も p で割り切れる。

ところが、p と q は互いに素であるから、q も $q+ap$ も p で割り切れない。

したがって、$p=1$ であり、u は整数である。

$2u+a=0$ のとき　$a=-2u=-\dfrac{2q}{p}$ は整数である。p と q は互いに素であるから、$p=1$ または $p=2$ である。

②に $a=-2u$ を代入すると　$u^2+3v^2-2u^2+b=0$ 　$b=u^2-3v^2$

$p=1$ のとき、u は整数。　$b=q^2-\dfrac{3s^2}{r^2}$ であり、$b,\ q^2$ は整数であるから、$\dfrac{3s^2}{r^2}$ は整数である。

r と s は互いに素であるから、r^2 は 3 の約数であるが、適するのは $r^2=1$ のみ。

したがって、$r=1$ であり、v も整数である。

$p=2$ のとき、q は奇数である。　$b=\dfrac{q^2}{4}-\dfrac{3s^2}{r^2}$ 　$4r^2b=r^2q^2-12s^2$ 　$4(r^2b+3s^2)=r^2q^2$ ――④

④の左辺は 4 で割り切れるから、④の右辺も 4 で割り切れる。

q は奇数であるから、r^2 が 4 で割り切れる。すなわち、r は偶数であり、したがって s は奇数。

$b=\dfrac{q^2}{4}-\dfrac{3s^2}{r^2}=\dfrac{q^2r^2-3s^2}{4r^2}$ であり、b は整数であるから、少なくとも $q^2r^2-3s^2$ は偶数である。

ところが、$q,\ s$ は奇数、r は偶数であるから、$q^2r^2-3s^2$ は奇数となり、不適。

以上により、$u,\ v$ がともに整数であることが示された。（証明終）