1999年京大後期理 $\boxed{6}$

(1)

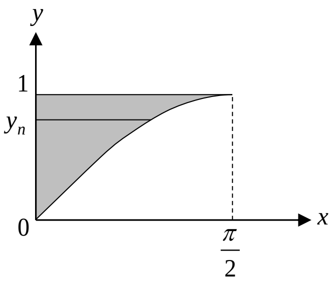
$a \leqq x \leqq b$ で連続かつ微分可能な関数 $F(x)$ を考える。平均値の定理より、

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{1}{b-a}\int_a^b F'(x)dx=F'(c) \qquad a\leqq c\leqq b$$

となる c が存在する。$F'(x)$ を $f(x)$ で置き換えれば

$$\therefore \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c) \qquad a\leqq c\leqq b$$ （証明終）

(2)



$\sin x\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を、$g(x)\ (0\leqq x\leqq 1)$ とする。

この立体の体積を求めると

$$\pi\int_0^1 \{g(y)\}^2 dy=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx$$

$$=\pi\left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx=\frac{\pi^3}{4}-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$$

$$=\frac{\pi^3}{4}-2\pi\left(\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx\right)=\frac{\pi^3}{4}-2\pi\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi(\pi^2-8)}{4}$$

この立体の、$y_n\leqq y\leqq 1$ の部分の体積は $\pi\displaystyle\int_{y_n}^1 \{g(y)\}^2 dy$ であり、$\dfrac{\pi(\pi^2-8)}{4n}$ に等しい。

$$\int_{y_n}^1 \{g(y)\}^2 dy=\frac{\pi^2-8}{4n} \qquad \frac{1}{1-y_n}\int_{y_n}^1 \{g(y)\}^2 dy=\frac{\pi^2-8}{4n(1-y_n)}$$

ここで、(1)より、$\dfrac{1}{1-y_n}\displaystyle\int_{y_n}^1 \{g(y)\}^2 dy=\{g(c)\}^2$、$y_n\leqq c\leqq 1$ となる c が存在する。

$$\frac{\pi^2-8}{4n(1-y_n)}=\{g(c)\}^2 \qquad n(1-y_n)=\frac{\pi^2-8}{4\{g(c)\}^2}$$

$g(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ において単調増加であるから、$g(y_n)\leqq g(c)\leqq g(1)=\dfrac{\pi}{2}$ であり、

$$\frac{\pi^2-8}{4}\cdot\frac{4}{\pi^2}\leqq n(1-y_n)\leqq \frac{\pi^2-8}{4\{g(y_n)\}^2} \qquad 1-\frac{8}{\pi^2}\leqq n(1-y_n)\leqq \frac{\pi^2-8}{4\{g(y_n)\}^2}$$

$n\to\infty$ のとき、$y_n\to 1$、$g(y_n)\to\dfrac{\pi}{2}$ であるから、はさみうちの原理により

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n(1-y_n)=1-\frac{8}{\pi^2}$$ ……(答)