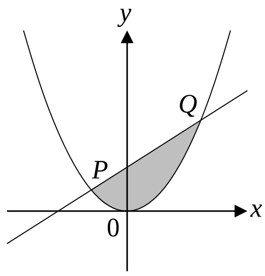
1999 年京大理 $\boxed{1}$ 文 $\boxed{2}$ 共通

$P(p,\ p^2),\ Q(q,\ q^2)\ (p<q)$ とする。直線 PQ の方程式は

$$y=\frac{q^2-p^2}{q-p}(x-p)+p^2=(p+q)(x-p)+p^2=(p+q)x-pq$$

放物線 $y=x^2$ と、線分 PQ が囲む部分の面積は



$$S=\int_p^q\left\{(p+q)x-pq-x^2\right\}dx=-\int_p^q\left\{x^2-(p+q)x+pq\right\}dx=-\int_p^q(x-p)(x-q)dx$$

$$=-\int_p^q(x-p)\left\{(x-p)-(q-p)\right\}dx=-\int_p^q\left\{(x-p)^2-(q-p)(x-p)\right\}dx$$

$$=-\left[\frac{(x-p)^3}{3}-(q-p)\cdot\frac{(x-p)^2}{2}\right]_p^q=-\frac{(q-p)^3}{3}+\frac{(q-p)^3}{2}=\frac{(q-p)^3}{6}=1$$

$$\therefore (q-p)^3=6\quad \therefore (q-p)^2=6^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{36}\ \text{——①}$$

$R\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ と書けるので、$X=\dfrac{p+q}{2},\ Y=\dfrac{p^2+q^2}{2}$ とすると

$$\therefore p+q=2X\quad 2Y=p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=4X^2-2pq\quad \therefore pq=2X^2-Y$$

①より

$$(q-p)^2=(p+q)^2-4pq=4X^2-4(2X^2-Y)=4Y-4X^2=\sqrt[3]{36}\quad \therefore Y=X^2+\frac{\sqrt[3]{36}}{4}$$

求める方程式は　$\therefore y=x^2+\dfrac{\sqrt[3]{36}}{4}$ ……(答)

※1/6 公式から、いきなり $S=\dfrac{(q-p)^3}{6}=1$ でもいいのかもしれないが、大した手間ではないので、きちんと求めたほうが無難かもしれない。