1999 年京大理 $\boxed{2}$

$a>0$ として、$A(a,\ 0),\ B(-a,\ 0),\ P(x,\ y)$ としても、一般性を失わない。

$\overrightarrow{PA}=(a-x,\ -y),\ \overrightarrow{PB}=(-a-x,\ -y)$ より

$$\left|\overrightarrow{PA}\right|=\sqrt{(a-x)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2+a^2-2ax}\qquad \left|\overrightarrow{PB}\right|=\sqrt{(a+x)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2+a^2+2ax}$$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-(a^2-x^2)+y^2=x^2+y^2-a^2$$

$$\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PB}\right|+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2}+x^2+y^2-a^2=c$$

$$\sqrt{(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2}=c+a^2-x^2-y^2$$

$c+a^2-x^2-y^2\geqq 0$ の条件下で、両辺を 2 乗する。$c+a^2-x^2-y^2=c+2a^2-(x^2+y^2+a^2)$ より

$$(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2=(c+2a^2)^2-2(c+2a^2)(x^2+y^2+a^2)+(x^2+y^2+a^2)^2$$
$$2cx^2+2(c+2a^2)y^2=c^2+4ca^2+4a^4-2(ca^2+2a^4)=c(c+2a^2)$$
$$\frac{2x^2}{c+2a^2}+\frac{2y^2}{c}=1\qquad \therefore\ \frac{x^2}{\frac{c}{2}+a^2}+\frac{y^2}{\frac{c}{2}}=1\ \text{——①}$$

①が表す楕円は、円 $x^2+y^2=c+a^2$ の内部に含まれるから、$c+a^2-x^2-y^2\geqq 0$ を満たす。

したがって、求める軌跡は、楕円 $\dfrac{x^2}{\frac{c}{2}+a^2}+\dfrac{y^2}{\frac{c}{2}}=1$ である。……(答)

(注)

$\cos\angle APB=\dfrac{\left|\overrightarrow{PA}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB}\right|^2-AB^2}{2\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PB}\right|}$ より、$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PB}\right|\cos\angle APB=\dfrac{\left|\overrightarrow{PA}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB}\right|^2-AB^2}{2}$ であるから

$$\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PB}\right|+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PB}\right|+\frac{\left|\overrightarrow{PA}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB}\right|^2-AB^2}{2}=c$$

$$\left|\overrightarrow{PA}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB}\right|^2+2\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PB}\right|=\left(\left|\overrightarrow{PA}\right|+\left|\overrightarrow{PB}\right|\right)^2=2c+AB^2\qquad \therefore\left|\overrightarrow{PA}\right|+\left|\overrightarrow{PB}\right|=\sqrt{2c+AB^2}$$

$\left|\overrightarrow{PA}\right|+\left|\overrightarrow{PB}\right|$ は一定であり、P の軌跡が、$A,\ B$ を焦点とする楕円であることは、座標をおかなくてもわかる。