1999年京大理 $\boxed{3}$

(1)

$$\frac{{b_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{a_1}^2}{{b_0}^2+1}-\left(\frac{{a_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{b_1}^2}{{b_0}^2+1}\right)=\frac{({b_1}^2-{a_1}^2)({b_0}^2+1)-({b_1}^2-{a_1}^2)({a_0}^2+1)}{({a_0}^2+1)({b_0}^2+1)}=\frac{({b_1}^2-{a_1}^2)({b_0}^2-{a_0}^2)}{({a_0}^2+1)({b_0}^2+1)}>0$$

$$\therefore \frac{{b_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{a_1}^2}{{b_0}^2+1}>\frac{{a_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{b_1}^2}{{b_0}^2+1}$$ （証明終）

(2)

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{{x_k}^2}{k^2+1}$ とおく。S_n が最小になるのは、$x_k=k\ (1\leqq k\leqq n)$ のときであることを示す。

$1\leqq i<j\leqq n$ として、$x_k=k$ の状態から x_i と x_j を入れ替える。すなわち、$x_i=j,\ x_j=i$ である。

このとき、(1)より、$\dfrac{j^2}{i^2+1}+\dfrac{i^2}{j^2+1}>\dfrac{i^2}{i^2+1}+\dfrac{j^2}{j^2+1}$ であるから、$S_n>\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1}$ となる。

$x_k=k$ の状態から、$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ のうちどの2数を入れ替えても、必ず $S_n>\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1}$ となるから、

S_n の最小値は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1}$ である。

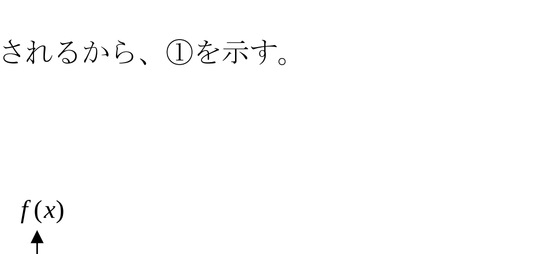
したがって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1}>n-\frac{8}{5}$ を示せばよいから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2+1}\right)=n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}>n-\frac{8}{5}\quad \therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<\frac{8}{5}\ \text{——①}$$

①が成立すれば、任意の $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ について $S_n>n-\dfrac{8}{5}$ が示されるから、①を示す。

（解答1）

関数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ は、$x\geqq 0$ において単調減少であるから



$$\frac{1}{k^2+1}<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^2+1}dx\quad \therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<\int_0^n\frac{1}{x^2+1}dx$$

$n=\tan\theta_n\ \left(0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。$x=\tan\theta$ とすると　$dx=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

x	$0\to n$
θ	$0\to\theta_n$

$$\int_0^n\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\theta_n}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\theta_n}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\theta_n}=\theta_n<\frac{\pi}{2}$$

したがって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<\frac{\pi}{2}<\frac{3.2}{2}=\frac{8}{5}$ であるから、①が成立し、題意は満たされた。（証明終）

（解答 2）

$n=1$ のとき　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{8}{5}$ は成立。

$n\geqq 2$ のとき　$k\geqq 2$ において $\dfrac{1}{k^2+1}<\dfrac{1}{k^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k+1}\right)$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}&<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)<\frac{5}{4}\end{aligned}$$

したがって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<\frac{5}{4}<\frac{8}{5}$ であるから、①が成立し、題意は満たされた。（証明終）

※出題者が意図した解答は、（解答 1）と考えられるが、（解答 2）の方が、近似精度が高いことがわかる。
　数学的帰納法ではうまくいかない。