1999 年京大理 $\boxed{4}$

(1)

$\triangle ABC$ の重心は、$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=1$ であり、一辺の長さが $\sqrt{3}$ であるから、$|\alpha-1|=|\beta-1|=|\gamma-1|=1$ である。

したがって、$z=\alpha-1$ とすると

$$\beta-1=e^{i\frac{2}{3}\pi}z,\ \gamma-1=e^{-i\frac{2}{3}\pi}z \quad \therefore \beta=e^{i\frac{2}{3}\pi}z+1,\ \gamma=e^{-i\frac{2}{3}\pi}z+1 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$$\beta\gamma=(e^{i\frac{2}{3}\pi}z+1)(e^{-i\frac{2}{3}\pi}z+1)=z^2+1+(e^{i\frac{2}{3}\pi}+e^{-i\frac{2}{3}\pi})z=z^2-z+1 \quad \alpha\beta\gamma=(z+1)(z^2-z+1)=z^3+1$$

$|z|=1$ であるから、$z=e^{i\theta}\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

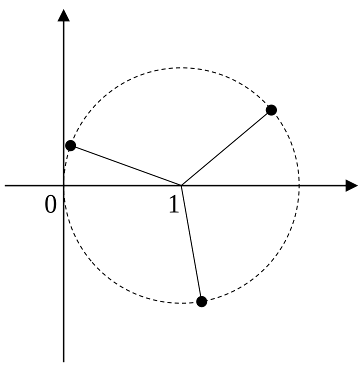
$$z^3+1$$
$$=e^{i3\theta}+1=\cos 3\theta+1+i\sin 3\theta=2\cos^2\frac{3}{2}\theta+2i\sin\frac{3}{2}\theta\cos\frac{3}{2}\theta=2\cos\frac{3}{2}\theta\left(\cos\frac{3}{2}\theta+i\sin\frac{3}{2}\theta\right)=2e^{i\frac{3}{2}\theta}\cos\frac{3}{2}\theta$$

$$\therefore |\alpha\beta\gamma|=|z^3+1|=2\left|\cos\frac{3}{2}\theta\right|=1 \quad \therefore \cos\frac{3}{2}\theta=\pm\frac{1}{2}$$

$0\leqq\dfrac{3}{2}\theta<3\pi$ より $\quad \dfrac{3}{2}\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi \quad 3\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi,\ \dfrac{10}{3}\pi,\ \dfrac{14}{3}\pi,\ \dfrac{16}{3}\pi$

このうち、$\alpha\beta\gamma$ の虚数部分 $\sin 3\theta>0$ となるのは

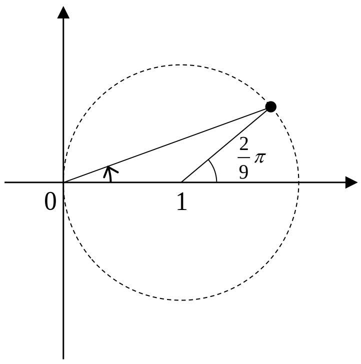
$$3\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi,\ \frac{14}{3}\pi \quad \therefore \theta=\frac{2}{9}\pi,\ \frac{8}{9}\pi,\ \frac{14}{9}\pi$$

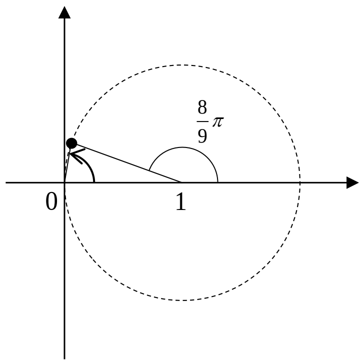


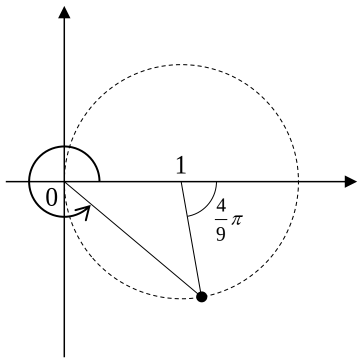
$\dfrac{8}{9}\pi=\dfrac{2}{9}\pi+\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{14}{9}\pi=\dfrac{8}{9}\pi+\dfrac{2}{3}\pi$ であるから、いずれの θ についても、

3 つの複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の組は、一致する。

これら 3 つの複素数の偏角を求めると、図より $\quad \dfrac{\pi}{9},\ \dfrac{4}{9}\pi,\ \dfrac{16}{9}\pi$







$0°\leqq\arg\alpha\leqq\arg\beta\leqq\arg\gamma<360°$ であることから、度数法に換算して

$\therefore \arg\alpha=20°,\ \arg\beta=80°,\ \arg\gamma=320° \quad \cdots\cdots(\text{答})$