1999年京大理 $\boxed{5}$

(1)

$p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0$ より　$-p=q\sqrt{2}+r\sqrt{3}$　両辺を 2 乗すると

$p^2=2q^2+2qr\sqrt{6}+3r^2$　$2qr\sqrt{6}=p^2-2q^2-3r^2$

ここで、$qr\neq 0$ のとき、$\sqrt{6}=\dfrac{p^2-2q^2-3r^2}{2qr}$ となるが、右辺は有理数、左辺は無理数であるから不適。

したがって、$qr=0$ であり、$p^2-2q^2-3r^2=0$ である。

$q=0$ とすると　$p+r\sqrt{3}=0$

$r\neq 0$ のとき、$\sqrt{3}=-\dfrac{p}{r}$ となるが、右辺は有理数、左辺は無理数であるから不適。

したがって、$r=0$ であり、$p=0$ である。

$r=0$ とすると　$p+q\sqrt{2}=0$

$q\neq 0$ のとき、$\sqrt{2}=-\dfrac{p}{q}$ となるが、右辺は有理数、左辺は無理数であるから不適。

したがって、$q=0$ であり、$p=0$ である。

いずれにしても $p=q=r=0$ であり、$p^2-2q^2-3r^2=0$ も成立する。
以上により示された。(証明終)

(2)

$f(1)=1+a+b$　$f(1+\sqrt{2})=3+2\sqrt{2}+a(1+\sqrt{2})+b=3+a+b+(2+a)\sqrt{2}$　$f(\sqrt{3})=3+b+a\sqrt{3}$

$f(1),\ f(1+\sqrt{2}),\ f(\sqrt{3})$ はいずれも有理数であると仮定すると、
$f(1+\sqrt{2})-f(1)=2+(2+a)\sqrt{2}$ は有理数であり、$(2+a)\sqrt{2}$ は有理数である。
$f(\sqrt{3})-f(1)=2-a+a\sqrt{3}=2+a(\sqrt{3}-1)$ は有理数であり、$a(\sqrt{3}-1)$ は有理数である。

$u,\ v$ を有理数として、$u=(2+a)\sqrt{2},\ v=a(\sqrt{3}-1)$ とする。a を消去すると

$u=\left(2+\dfrac{v}{\sqrt{3}-1}\right)\sqrt{2}=\left(2+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}v\right)\sqrt{2}$　$2u=\left\{4+(\sqrt{3}+1)v\right\}\sqrt{2}$

$\sqrt{2}\,u=4+(\sqrt{3}+1)v$　$\therefore 4+v-u\sqrt{2}+v\sqrt{3}=0$ ——①

(1) より、①を満たすには $4+v=u=v=0$ である必要があるが、$v=0$ かつ $v=-4$ となり、矛盾する。

したがって、$f(1),\ f(1+\sqrt{2}),\ f(\sqrt{3})$ はいずれも有理数であるという仮定は誤りであり、
$f(1),\ f(1+\sqrt{2}),\ f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数である。(証明終)