1999 年京大理 $\boxed{6}$

$x=\dfrac{3t-t^2}{t+1}$ より　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{(3-2t)(t+1)-(3t-t^2)}{(t+1)^2}=\dfrac{3+t-2t^2-3t+t^2}{(t+1)^2}=\dfrac{3-2t-t^2}{(t+1)^2}=\dfrac{(1-t)(3+t)}{(t+1)^2}$

$y=\dfrac{3t^2-t^3}{t+1}=tx$ より

$$\frac{dy}{dt}=x+t\cdot\frac{dx}{dt}=t\left\{\frac{3-t}{t+1}+\frac{3-2t-t^2}{(t+1)^2}\right\}=t\cdot\frac{(3-t)(t+1)+(3-2t-t^2)}{(t+1)^2}=t\cdot\frac{3+2t-t^2+3-2t-t^2}{(t+1)^2}=\frac{2t(3-t^2)}{(t+1)^2}$$

$x,\ y$ の $0\leqq t\leqq 3$ における増減は、右の通り。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$\dfrac{dx}{dt}$		＋	0	－	－	－	
$\dfrac{dy}{dt}$		＋	＋	＋	0	－	
x	0	↗	1	↘	↘	↘	0
y	0	↗	↗	↗		↘	0

$t=1$ のとき　$x=1$

$t=\sqrt{3}$ のとき

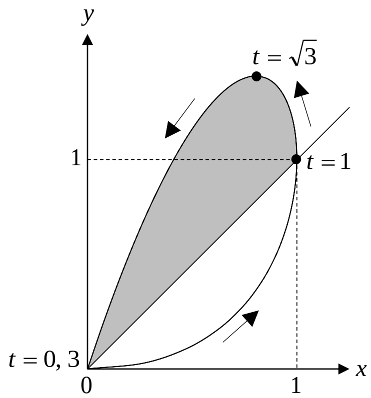
$$y=\frac{3(3-\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}=\frac{3(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2}=\frac{3(-6+4\sqrt{3})}{2}$$
$$=-9+6\sqrt{3}$$

$t=0,\ 3$ のとき、$x=y=0$ であるから

$\therefore 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq -9+6\sqrt{3}$ ……(答)

次に、$y=tx$ を考慮すると、$(x,\ y)$ が描くグラフの概形は、右図の通り。

$y\geqq x$ となるのは、$1\leqq t\leqq 3$ のときであり、このときの y を、y_2 と表す。



求める面積は、$\displaystyle\int_0^1 y_2\,dx-\frac{1}{2}$ で与えられる。ここで

$$\int_0^1 y_2\,dx=\int_3^1 y_2\frac{dx}{dt}\,dt=\int_1^3\frac{t(3t-t^2)(t^2+2t-3)}{(t+1)^3}\,dt$$

$s=t+1$ と置き換える。$t=s-1$ より

$3t-t^2=3(s-1)-(s^2-2s+1)=-4+5s-s^2$　　$t^2+2t-3=(s^2-2s+1)+2(s-1)-3=s^2-4$

$t(3t-t^2)(t^2+2t-3)$

$=(s-1)(-4+5s-s^2)(s^2-4)=(s-1)(16-20s+5s^3-s^4)=-16+36s-20s^2-5s^3+6s^4-s^5$

$$\int_1^3\frac{t(3t-t^2)(t^2+2t-3)}{(t+1)^3}\,dt=\int_2^4\frac{-16+36s-20s^2-5s^3+6s^4-s^5}{s^3}\,ds=\int_2^4\left(\frac{-16}{s^3}+\frac{36}{s^2}-\frac{20}{s}-5+6s-s^2\right)ds$$

$$=\left[\frac{8}{s^2}-\frac{36}{s}-20\log s-5s+3s^2-\frac{s^3}{3}\right]_2^4$$

$$=\frac{1}{2}-9-40\log 2-20+48-\frac{64}{3}-\left(2-18-20\log 2-10+12-\frac{8}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+33-\frac{56}{3}-20\log 2=\frac{1}{2}+\frac{43}{3}-20\log 2$$

以上により、求める面積は　$\therefore \dfrac{43}{3}-20\log 2$ ……(答)