2000年京大後期文 $\boxed{5}$

(1)

A と B が出会う点は、$(0,\ 2)$ か $(1,\ 1)$ か $(2,\ 0)$ である。

A と B が点 $(0,\ 2)$ で出会う確率は　$(1-p)^2q^2$

A と B が点 $(1,\ 1)$ で出会う確率は　$2p(1-p)\times 2q(1-q)=4pq(1-p)(1-q)$

A と B が点 $(2,\ 0)$ で出会う確率は　$p^2(1-q)^2$

$$
\begin{aligned}
f(p,\ q)&=(1-p)^2q^2+4pq(1-p)(1-q)+p^2(1-q)^2\\
&=q^2-2q^2p+p^2q^2+4(q-q^2)p-4(q-q^2)p^2+(1-2q+q^2)p^2\\
&=(6q^2-6q+1)p^2+2q(2-3q)p+q^2 \quad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

(2)

q を固定し、$g(p)=(6q^2-6q+1)p^2+2q(2-3q)p+q^2$ とすると　$g'(p)=2(6q^2-6q+1)p+2q(2-3q)$

$g'(0)=2q(2-3q)$　　$g'(1)=2(6q^2-6q+1)+2q(2-3q)=2(3q^2-4q+1)=2(3q-1)(q-1)$

$0\leqq q\leqq\dfrac{1}{2}$ において、$g'(0)$ と $g'(1)$ の符号を表にすると、右の通り。

q	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$g'(0)$	0	＋	＋	＋	＋
$g'(1)$	＋	＋	0	－	－

$0\leqq q\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき、$g'(p)\geqq 0$ であり、$g(p)$ は単調増加。

$g(p)$ の最大値は　$g(1)=(6q^2-6q+1)+2q(2-3q)+q^2=q^2-2q+1=(1-q)^2$

$\dfrac{1}{3}<q\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき、$0<p<1$ において $g'(p)=0$ となる p がただ1つ存在する。

ここで、$6q^2-6q+1=0$ を解くと　$q=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$

$\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}<\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}<\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ であるから、$\dfrac{1}{3}<q\leqq\dfrac{1}{2}$ において、$6q^2-6q+1\neq 0$ である。

$g'(p)=0$ となる p は、$p=\dfrac{q(3q-2)}{6q^2-6q+1}$ であり、$g(p)$ の最大値は

$$
\begin{aligned}
&\frac{q^2(3q-2)^2-2q^2(3q-2)^2+q^2(6q^2-6q+1)}{6q^2-6q+1}\\
&=\frac{q^2(6q^2-6q+1-9q^2+12q-4)}{6q^2-6q+1}=\frac{q^2(-3q^2+6q-3)}{6q^2-6q+1}=\frac{3q^2(1-q)^2}{-6q^2+6q-1}
\end{aligned}
$$

以上により、$f(p,\ q)$ を最大にする p と、そのときの最大値 $M(q)$ は

$0\leqq q\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき $p=1,\ M(q)=(1-q)^2$、$\dfrac{1}{3}<q\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき $p=\dfrac{q(3q-2)}{6q^2-6q+1},\ M(q)=\dfrac{3q^2(1-q)^2}{-6q^2+6q-1}$　$\cdots\cdots$(答)

※(2)は2次式の最大値に帰着されるが、場合分けが面倒である。