2000年京大文 $\boxed{4}$

(1)

$b-c=p-1>0 \quad \therefore b>c \quad c-a=pq-p-q+1=(p-1)(q-1)>0 \quad \therefore c>a$

したがって、$a<c<b$ であるから　$\therefore \angle A<\angle C<\angle B$ ……(答)

(2)

$\angle A=60°$ とすると　$\angle A+\angle C+\angle B>3\times\angle A=180°$

$\angle B=60°$ とすると　$\angle A+\angle C+\angle B<3\times\angle B=180°$

したがって、$\angle C=60°$ しかあり得ないので

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 60°=a^2+b^2-ab$$

$$(pq+1)^2=(p+q)^2+(pq+p)^2-(p+q)(pq+q)$$

$$p^2q^2+2pq+1=p^2+2pq+q^2+p^2q^2+2p^2q+q^2-p^2q-pq-pq^2-q^2$$

$$1=p^2+p^2q+q^2-pq-pq^2=(q+1)p^2-(q^2+q)p+q^2$$

$$(q+1)p^2-(q^2+q)p+q^2-1=(q+1)(p^2-pq+q-1)=(q+1)(p-1)(p-q+1)=0$$

$p\geqq 2,\ q\geqq 2$ より　$p-q+1=0 \quad \therefore q=p+1$

$a=p+q=2p+1$ は奇数であり、2^n にはならない。

$c=pq+1=p(p+1)+1$ であり、$p(p+1)$ は連続した自然数の積であるから、偶数。

したがって、c は奇数であり、2^n にはならない。

$b=pq+p=p(p+2)$ であり、$b=2^n$ となるには、$p=2^l,\ p+2=2^m$ という形である必要がある。

$2^l+2=2^m \quad 2^{l-1}+1=2^{m-1}$ ――①

ここで、$l\geqq 2$ のとき、$l<m$ であるから、①の左辺は奇数、右辺は偶数になるので、不適。

$l=1$ しかあり得ないので　$2=2^{m-1} \quad \therefore m=2$

$p=2,\ q=3$ であるから

$a=p+q=5 \quad b=pq+p=8=2^3 \quad c=pq+1=7 \quad \therefore a=5,\ b=8,\ c=7$ ……(答)