2000年京大文 $\boxed{5}$

$I(a)=2\int_0^1 \left|t^2-at\right|dt=2\int_0^1 t\left|t-a\right|dt$ とすると

$a \leqq 0$ のとき　$0\leqq t\leqq 1$ において $t-a\geqq 0$ であるから　$I(a)=2\int_0^1 t(t-a)dt=2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{a}{2}t^2\right]_0^1=\frac{2}{3}-a$

$0<a<1$ のとき　$0\leqq t<a$ において $\left|t-a\right|=a-t$、$a\leqq t\leqq 1$ において $\left|t-a\right|=t-a$ であるから

$$I(a)=2\int_0^a t(a-t)dt+2\int_a^1 t(t-a)dt=2\cdot\frac{a^3}{6}+2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{a}{2}t^2\right]_a^1=\frac{a^3}{3}+2\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{2}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}\right)=\frac{2}{3}a^3-a+\frac{2}{3}>0$$

$1\leqq a$ のとき　$0\leqq t\leqq 1$ において $t-a\leqq 0$ であるから　$I(a)=2\int_0^1 t(a-t)dt=2\left[\frac{a}{2}t^2-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=a-\frac{2}{3}$

$f(x)=x^2-ax-I(a)$ とすると

$a\leqq 0$ のとき　$f(0)=a-\frac{2}{3}<0$　$f(1)=1-a+a-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}>0$　$0\leqq x\leqq 1$ の範囲に 1 つの解を持つ。

$0<a<1$ のとき　$f(0)=-\frac{2}{3}a^3+a-\frac{2}{3}<0$　$f(1)=1-a-\frac{2}{3}a^3+a-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{3}$

$0<a\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき　$f(1)\geqq 0$ であるから、$0\leqq x\leqq 1$ の範囲に 1 つの解を持つ。

$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<a<1$ のとき　$f(1)<0$ であり、$f(x)$ は下に凸であるから、$0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解を持たない。

$1\leqq a$ のとき　$f(0)=\frac{2}{3}-a<0$　$f(1)=1-a+\frac{2}{3}-a=\frac{5}{3}-2a<0$

$f(x)$ は下に凸であるから、$0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解を持たない。

以上まとめて、求める個数は　$a\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき 1 個、$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<a$ のとき 0 個 ……(答)

※ $I(a)$ は絶対値記号付き関数の積分なので、値は正であり、$0<a<1$ のとき $-I(a)=-\frac{2}{3}a^3+a-\frac{2}{3}<0$ は、

調べなくてもわかる。気づかなくても、微分して調べればわかる。