2000 年京大後期理 $\boxed{1}$

(1)

z が α と β を結ぶ直線上にあるとき、実数 t によって $z=t\alpha+(1-t)\beta$ と書ける。ただし、$t\neq 1$ である。

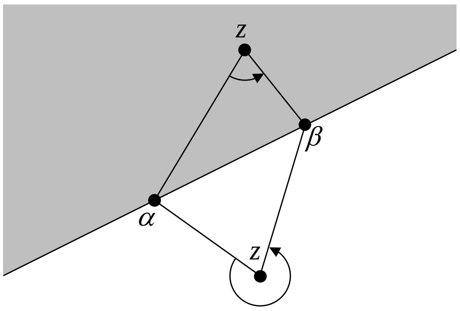
このとき　$z-\alpha=(1-t)(\beta-\alpha)$　$z-\beta=t(\alpha-\beta)$　$\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}=\dfrac{t}{t-1}$

$\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ は実数であるから、α と β を結ぶ直線上の点は、除かれる。

$\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}=\dfrac{\beta-z}{\alpha-z}$ であり、$\beta-z=|\beta-z|e^{i\theta_2}$, $\alpha-z=|\alpha-z|e^{i\theta_1}$ とする。

$$\frac{z-\beta}{z-\alpha}=\left|\frac{\beta-z}{\alpha-z}\right|e^{i(\theta_2-\theta_1)}=\left|\frac{\beta-z}{\alpha-z}\right|\{\cos(\theta_2-\theta_1)+i\sin(\theta_2-\theta_1)\}$$

虚数部分が正になる条件は、$\sin(\theta_2-\theta_1)>0$ である。
ここで、偏角 $\theta_2-\theta_1$ を、$0<\theta_2-\theta_1<2\pi$ の範囲で考える。
このとき、$\theta_2-\theta_1$ は、z を中心に反時計回りに α から β に向かって回転するときの回転角を表す。
$\sin(\theta_2-\theta_1)>0$ となるには、$0<\theta_2-\theta_1<\pi$ であればよい。



右図のように、z の存在範囲は、α と β を結ぶ直線上を、
α から β に進む向きから見て、左側になる。
境界線は含まない。

(2)

$(z-\alpha)(z-\beta)+(z-\beta)(z-\gamma)+(z-\gamma)(z-\alpha)=0$ ——① が成り立つとき、$z=\alpha$ とすると、
$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)=0$ であるが、$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は互いに相違なる複素数であるから、不適。
同様に、$z=\beta,\ z=\gamma$ としても不適であるから、z は $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ のいずれとも等しくない。

①の両辺を、$(z-\alpha)(z-\beta)$ で割ると、$1+\dfrac{z-\gamma}{z-\alpha}+\dfrac{z-\gamma}{z-\beta}=0$ となり、$\dfrac{z-\gamma}{z-\alpha}+\dfrac{z-\gamma}{z-\beta}$ の虚数部分は 0 である。

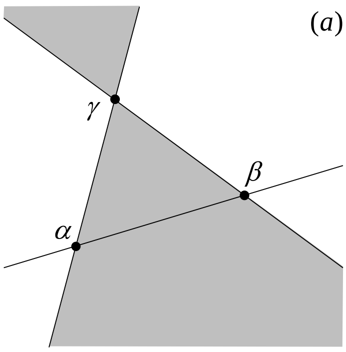
このとき　i）$\dfrac{z-\gamma}{z-\alpha}$ と $\dfrac{z-\gamma}{z-\beta}$ の虚数部分は、いずれも 0　ii）$\dfrac{z-\gamma}{z-\alpha}$ と $\dfrac{z-\gamma}{z-\beta}$ の虚数部分は、符号が異なる

のいずれかである。i)の場合、z は α と γ を結ぶ直線上にあり、なおかつ β と γ を結ぶ直線上にある。
$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は一直線上にないから、$z=\gamma$ に限られるが、z は $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ のいずれとも等しくないので、不適。
したがって、ii)の場合しかあり得ない。

$\dfrac{z-\gamma}{z-\alpha}$ の虚数部分が負で $\dfrac{z-\gamma}{z-\beta}$ の虚数部分が正、または

$\dfrac{z-\gamma}{z-\alpha}$ の虚数部分が正で $\dfrac{z-\gamma}{z-\beta}$ の虚数部分が負、のいずれかであるから、

(1) より、このような z の存在範囲は、右図(a)の通り。
境界線を含まない。

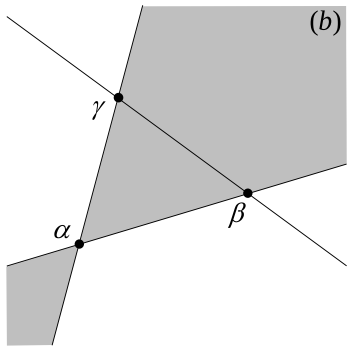


同様に、

①の両辺を、$(z-\beta)(z-\gamma)$ で割ると、$1+\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}+\dfrac{z-\alpha}{z-\gamma}=0$ となり、

$\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ と $\dfrac{z-\alpha}{z-\gamma}$ の虚数部分は、符号が異なる。

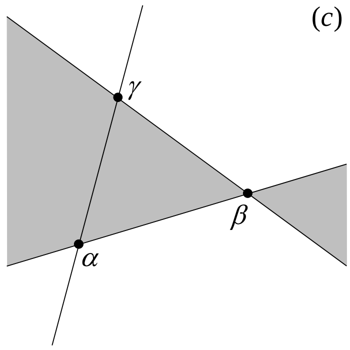
(1) より、このような z の存在範囲は、右図(b)の通り。
境界線を含まない。



①の両辺を、$(z-\gamma)(z-\alpha)$ で割ると、$1+\dfrac{z-\beta}{z-\gamma}+\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}=0$ となり、

$\dfrac{z-\beta}{z-\gamma}$ と $\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ の虚数部分は、符号が異なる。

(1) より、このような z の存在範囲は、右図(c)の通り。
境界線を含まない。



①を満たす z の存在範囲は、(a) (b) (c) の共通範囲であるから、
z は α, β, γ を頂点とする三角形の内部に存在する。(証明終)